ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis:

An. Dom.

M. DC. LXV.

LONDINI, 1684.
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli*. 1684.

UMI

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

DE magnitudinis affectionibus & symptomatis communibus, quæ experientiam incurrunt, adeóque Mathematicis materiam hypothesibus subministrant, disquisiturum præfari subito & præmonere, quod plane conscius sim mihi quàm lubricum & anceps negotium aggrediar. Sunt enim ejusmodi res, quas perdifficile sit non explicando perplexiores reddere, non illustrando obscurare; tam formè tenuis & abstractæ naturæ res, vix ut illas imaginatio comprehendere, justos singulis limites assignare, alias ab aliis secernere queat; subtilissimam adeò mentis aciem eludunt, & distinctas ipsarum ideas captanti fugaces elabuntur & evanescunt: sic ut illis plerisque non immeritò possit applicari, quod de tem-

pore dixisse perhibetur S. Augustinus, *Quid sit tempus, si nemo quærat à me scio, si quis interroget nescio.* Quid enim v. g. sit extensio, quid spatium, quid motus, qui de illis sermones conserit unusquisque, vel è vulgo se clare putat intelligere, sin ipsorum mentem excutias, & dum ore proferunt ista vocabula quid mente cogitent explores, inextricabilibus plerosque laqueis irretitos cernes, hæsitantes animo, linguâ præpeditos. Imò post diligentissimam contemplationem cum exquisitissima cura de illis verba facientes, etiam subtilissimi Philosophi vix consona dicere possunt, aut alii aliis, aut sibimet iidem ipsis; nec fere quisquam eas ita pertractat, ut non è dictis immania paradoxa, gravissimaque consequi videantur difficultates. Ex. g. Cartesius ex suo spatii conceptu deducit infinitam (vel idem efferendo molliùs, indefinitam) mundanæ materiæ extensionem, nec non impossibilitatem vacui, & immediatam contiguitatem corporum anteà distantium, annihilatis vel amotis corporibus intermediis, hisque cognata. Quæ velut à communi sensu abhorrentia, quàm meritò non disputo, reprehendit & explodit ejus æmulus Hobbius. At verò num clariora vel certiora, minus ἀόριστα, magis ἀφωρισμένα reponit ipse? Videamus paucillum: Spatium appellat corporis ideam vel phantasma; locum spatii cum corporis magnitudine coincidentiam; motum unius loci relictionem, & alterius acquisitionem. Quis non videt quàm aut hæc repugnent sibi, vel admodum ridiculis obnoxia sint consequentiis; talibus nempe locus ergò corporis, hujus videlicet

Cap. 7. de Corp.

schol*æ*,

ſcholæ, nil erit aliud quàm coincidentia phantaſmatis (mei, tui, cujuſvis) cum ſcholæ magnitudine. Quaſi verò Papa Romanus non incolat Vaticanas ædes, non Romæ verſetur, aſt ubique gentium collocetur in omnium quotquot ſunt, aut de eo cogitant, hominum phantaſiis? (quo pacto facilè concipiatur eſſe pontifex œcumenicus). Ergò motus, lapidis puta vel ſagittæ, fuerit unius coincidentiæ phantaſmatis cum magnitudine relictio, & alterius coincidentiæ acquiſitio; dúmque Turca movet exercitum in Hungariam, nil is aliud quàm in tua phantaſia diſcurſitat, in tuo cerebello caſtra metatur. At quomodo obſecro magnitudo corporis cum phantaſmate vel idæa mentis coincidat, congruat, coexiſtat? quomodo derelinqui vel acquiri poteſt coincidentia corporis cum phantaſmate? quomodo phantaſma diſtantia corpora ſejungat & intercedat? quomodo phantaſma occupari, repleri, diſcerpi, menſuram admittere, tótque poteſt aliis attributis ſubjacere, quæ non veretur ipſe poſt traditam iſtam imaginariam ſpatii definitionem ſpatio aſſignare? Quid ſi nullus homo, nullus in univerſo phantaſes exiſteret, ideóne nuſquam aliæ res eſſent? aut neceſſariò quieſcerent omnia (ſed nec quieſcerent cùm quietis etiam definitionem ſpatii phantaſma ſubingrediatur)? Ideò, inquam, nullum ſpatium, nullus locus, nullus motus exiſtere poſſint? Quàm abſona ſunt hæc, quàm παράλογα, nedùm παράδοξα? Obiter hæc (pauca de multis) ut oſtendam quàm δυσκατάλεπτα, quamque δυσερμήνευτα ſunt iſta communia magnitudinis ſym-

ptomata, quum ea quam accuratissimè studentes enucleare, viri præ multis ingeniosi tot se labyrinthis, difficultatibus, incommodis innectant. Quo magis condonandum sit mihi, si dilutius fortassis & crassius, ad communem sensum, quam ad Metaphysicos captus accommodatius, quousque tantùm conducere putem proposito negotio, hoc est, quatenus Mathematicis inserviant hypothesibus, τὴν ὑποθέσεις δουλεύων, de iis dispiciam, ea recenseam & exponam. Ad rem: E magnitudinis præcipuis & communioribus affectionibus prima se nobis offert (nam ad nullum me ordinem astringo, cùm nullum sit, ut in ultima præmonui, ex parte rei fundamentum ordinis inter ejusdem rei proprietates reciprocas ac essentiales) prima, dico, magnitudinem ὡς ἔτυχε contemplantibus, se
I. sensui nostro, & cogitationi subjicit Terminatio. Nullam certe rem sensu attingimus, nisi ceu terminatam; nullius corporis interiora viscera penetramus, sed externam tantùm cutem oculo perlustramus, manu contrectamus. Nec cogitatione (saltem distincta) quamvis magnitudinem complectimur, nisi ut limitibus quibusdam conclusam & comprehensam. Confusè quidem imaginari possumus magnitudinem aliquam, puta lineam rectam, potentiâ, sicuti dixit Aristoteles, infinitam; hoc est, eam produci vel augeri quousque libet, vel citra intervallum majus quovis intervallo designato, quam proinde denominamus infinitam, nec improprie siquidem admittatur Philosophi,
Phys. III. 5. subtilissima profectò, definitio infiniti, Ἄπειρον τοῦτ' ἐστιν, οὗ κατὰ τὸ ποσὸν λαμβάνουσιν ἀεὶ

τι

πλαθῶν ἔξω ἐστὶν· *(Infinitum est, cujus sequi aliquam quantitatem accipiat, aliquid extra (vel præterea) sumi possit).* Verùm hoc nihil est aliud quàm plures successivè lineas, idque juxta potentiam quandam indeterminatam & arbitrariam, non unam actu lineam interminatam distinctè considerare; talem animo comprehendere non possumus, nam iterum recte Philosophus, τὸ ἄπειρον ᾗ ἄπειρον ἀγνωστον, *Infinitum quà tale concipi cognoscique nequit.* (Eadem res est de infinito κατ' ἀφαίρεσιν, per subductionem aut subdivisionem infinitam; quo nil intelligitur aliud quàm subtractionem seu divisionem ad libitum posse continuari, nec ad impossibilitatem ultra progrediendi redigi negotium. De utroque infinito). *Phys. I. 5. 11. 10*

Rursum optimè Aristoteles de Mathematicis loquens, οὐδὲ νῦν λόγῳ ἔστι ἄπειρος, οὐδὲ χωρὶς, ἀλλὰ μόνον ἔστιν ἐν βούλῃ πεπερασμένῳ· *Infinitâ magnitudine Mathematici nec egent nec utuntur, sed quantam lubet accipiunt ubi placuerit terminatam.* *Phys. III. 11*

Revera dum lineam concipimus, ideam formamus alicujus exilissimi quasi fili inter duos extremos apices protensi (saltem ab uno ad seipsum recurrentis, ut fit in lineis curvis figuram aliquam ambientibus). Dum superficiem cogitamus, corporis alicujus tenuissimam quasi cuticulam, aut laminam angustissimâ margine circumseptam imaginamur; dum corporis effigiem phantasiæ penicillo depingimus, molem plerunque quandam opacam strictissimo rarissimóque velo undiquaque obductam nobis repræsentamus. Dum angulum concipimus, spatium aliquod indeterminatum duabus aut pluribus lineis, vel superficiebus

ficiebus inclusum, vel aliquid tale concipimus. Nec secus de quantis analogicis; dum pondus scilicet cogitamus, aliquam cogitamus potentiam magnitudini cuipiam terminatæ (libræ videlicet uni, vel pluribus) elevandis parem; dum motum, corporis alicujus ab hoc ad illum terminum transitionem successivam; dum numerum, unitatis repetitionem aliquà incipientem, aliquà desinentem; vel multitudinem duabus unitatibus extremis, inclusive sumptis, definitam (ex vulgi fere loquor sententia, nam revera unitates non sunt termini numerorum, etsi terminos ipsi suos habent, eosdem nempe quos magnitudines quas repræsentant). Omnis igitur à nobis distinctà ratione conceptibilis quantitas est aliquo modo terminata, quatenusque talis (hoc est illa ipsa quantitatis affectio) conducit haud parum Mathematicis hypothesibus. Nam ex ea potissimùm magnitudinis præcipuas species seu dimensiones varias deducimus, & quod non temerè confingantur, at suo modo revera existant, quodammodo demonstramus. Sic enim licet argumentari: Corpus vel solida magnitudo (quam nemo scilicet non admittit, utpote palpabilem, & quæ propterea præsupponi potest) non ex ulla parte ad infinitum excurrit, & undiquaque terminatur: iste terminus non est introversum, aut quoad profunditatem divisibilis (nam si divisibilis esset, haud totus, sed ejus duntaxat exterius aliquod foret terminus præter hypothesin). Hinc datur solidæ magnitudinis terminus aliquis secundùm profunditatem indivisibilis; is vocetur superficies, ecce unam hypothesin

potheſin Mathematicam, & ex ea reſultantem definitionem. Porro dicta ſuperficies non eſt uſquam interminata, ſed aliquo ambitu ſeu extremo clauditur; ut extremum ſimili diſcurſu, quali prius, versus interiora, ſeu quoad latitudinem, eſt indiviſibile. Supponatur ergo dari ſuperficiei terminus quoad latitudinem indiviſibilis, qui dicatur linea; ecce alteram hypotheſim eique connatam definitionem. Itidem, iſta linea non eſt infinita, ſed introrſum, hoc eſt quoad longitudinem, ad utramque partem termino includitur; paríque ratione ſunt hi termini prorſus indiviſibiles: ergo ſupponatur dari lineæ terminus indiviſibilis, & hic appelletur punctum; quod omni modo indiviſibile eſt, participans quippe de ſuperficiei quoad profunditatem, & lineæ quoad latitudinem indiviſibilitate; nec non immediatè quoad longitudinem indiviſibile, quatenus lineæ terminus. Hinc tertia ſuppoſitio, conjunctam habens puncti definitionem. E quibus patet haud abſque fundamento ſupponi puncta, lineas, & ſuperficies à Mathematicis; nam licet ut termini nil ferè videantur aliud præter ulterioris extenſionis negationes (negationes tamen in re fundatas, ut vidimus, & ab intellectu bene perceptas; ſicut umbras & tenebras in Phyſicis, improbitatem & inſcitiam in Ethicis) tamen alio modo conſiderata admodum realia ac poſitiva fortiri videntur attributa. Superficiei v. g. duobus modis dividi, adaugeri, & imminui, menſuram ſubire, congruere, adæquari, excedere, deficere, nis non quomodocunq; moveri, & quieſcere convenit atque tribuitur.

Imò

Imò verò, sicut innueram, solæ superficies immediate sensibus objectantur, coloribus subjacent, lucis radios, sonique fluctus refringunt, aut repercutiunt; hæ primos motuum impetus excipiunt; hisce solis sese corpora mutuò contingunt, quippe quæ nullâ parte sui se permeant aut penetrant. Eadem ferme vel supparia lineis attributa coaptantur; his rerum distantiæ censentur; secundùm has lucis radii diriguntur, gravia descensum affectant, motus omnis tendit; his lucis & umbræ confinia dirimuntur; circa has quiescentes corpora revolvuntur; produci denique, contrahi, secari, mensurari, quomodocunque comparari possunt. Nec ipsis punctis, utut ὑπόστασιν ἀμυδρὰν, subobscuram & prætenuem habentibus entitatem, sua deesse videtur attributorum qualiscunque realitas. Nam & motum hæc & quietem obtinent; motum quidem unà cum corporibus quibus insunt, quietem verò subinde peculiarem sibi; sicut rotæ centrum, poli telluris aut cœli (etenim ejusmodi gyrationes circa quiescens aliquid peraguntur, & secundùm aliquid sui locum servant immutabilem) etiam circa punctum, gravitatis nempe centrum, corporum momenta consistunt, in eo quasi nodo vires suas colligunt & coadunant, eo quodammodo fulciuntur & sustentantur, secundùm id motûs sui sortiuntur directionem; versùs unum denique punctum in tellure medium, ceu conspirantibus votis, propendent & sponte ruunt omnia, vel directo certè gressu ab eo refugiunt atque recedunt. Sed audiamus Proclum tale puncto elogium pangentem: Τά τε γὰρ κέντρα καθ' ἐνέργειαν

Proclus.

ὑφέστηκε

ὑφίστησι συνεχείας ἢ χωρὶς ὑπάρχειν, καὶ ἐπιδέχεσθαι τὰς διαιρέσεις αὐτῶν, καὶ ἀντιτυπεῖν τοῖς δυνάμεις ἐν αὑταῖς, καὶ συνεφεδρεύειν πρὸς ἀλλήλας· καὶ ὅτι ἕξεσι συνεχῶν ὑπάρξει, καὶ σχήμασιν ὁμοίοις ἢ ἀνομοίοις περιγραφομένοις, καὶ τὰς ἄλλας παντοίας ἐφ' ἑαυτῶν ἀντοχὰς τοῖς ὑπ' αὐτῶν δυναμένοις ἐπιδέχεσθαι, ὅτι τὰ σημεῖα ὑπερβολὰς ἔχει καὶ συνεχικὰς δυνάμεις, καὶ παντοπαθῆ ἢ διαστατὰ πάντα, ἐνόσῳ τὴν χροιὰν, καὶ ἀναπαύσεις κινήσεων· ὅσα δ' ἀπάντων ἀδιαιρέτως ἐλάμβανεν αὐτῶν τινὰ ὑπόστασιν εἶναι φησὶ, τὸ ἄπορον, καὶ διαιρετὸν, καὶ μονιμον, καὶ φευκτὸν ἔχειν ἢ ὕπαρξιν αὐτῶν ἐνδεχομένην, πῶς ἐνδέχεται ὅλον περὶ αὐτὰ νοεῖσθαι φησὶ, καὶ ἀφορμὰς αὐτῶν τινὰς ἰδεῖν. Hæc magnifice Proclus, etsi speciosius & popularius (opinor) quam verius & accuratius. Nihilominus enim cum illo de indivisibilibus istis serio pronuntiante (καθ' ἑαυτὰ ὑφ' ἡμῶν) καὶ ὑπάρξιν ἔχει, καὶ δύναμιν αὐτοτελῆ, καὶ διαιρετὰ πάντῃ καὶ περιττὰ) juxta non sentio. Non exilitimo superficies, lineas aut puncta separatam quandam existentiam, aut propriam ex seipsis efficaciam possidere, vel aliter à solida magnitudine quam καθ' ἑαυτὰ distingui; sed unicam potius arbitror ex parte rei magnitudinem dari, quæ prout in varias partes extendi, diversimode partiri, differentes spissitudinis, latitudinis, & longitudinis considerationes induere vel subire potest, causam vel occasionem suppeditat idoneam rationi nostræ distinctionem illam, magnitudinis in tres quasi species huic scientiæ perquam utilem & accommodatam comminiscendi.

miniscendi. Sed de terminatione magnitudinis hæc dicta sufficiant: de figuratione enim speciali succurret opportunior alius dicendi locus. Ei succenturiat Extensio; quâ nempe significatur magnitudinis terminos non immediatè conjungi vel coëxistere, sed iis aliquid intercedere vel interponi. Id enim exigit ratio termini vel extremi, quæ diversi quiddam supponit intra terminos comprehensum. (Οὐκ ἅμα τὰ ἔσχατα, οὐ γὰρ ἐστιν ἔσχατον οὐδὲν τοῦ ἀμεροῦς, ἕτερον γὰρ τὸ ἔσχατον, καὶ οὗ ἔσχατον· *Extrema simul consistere nequeunt, nec enim aliquod ejus quod partibus caret extremum est; aliud enim extremum est ab eo, quod extremum habet*, inquit Philosophus: & alibi, τὸ πέρας ἄλλο καὶ οὗ πέρας) nec sanè concipere possumus ullam magnitudinem nisi velut extensam, & terminos habentem aliquo dissitos intervallo; non lineam nisi ceu semitam inter extrema duo loca porrectam; non superficiem, nisi ceu pavimentum intra limbos suos constratum; non corpus aliter quàm ut (vasculum aut) cameram suos intra parietes aliquid complectentem. Tales enim nobis experientia similitudines ac idæas suggerit magnitudinum. Nec secus ipsis κατ' ἀναλογίαν quantis etiam suo modo convenit extensio qualiscunque. Nam inter vim uni libræ attollendæ parem, & illam quæ decem libras potest elevare, media jacet potentia duas, tres, &c. libras evehere valens; unde pondus suo modo extenditur. Et inter anni, mensis, diei, horæ, τὰ νῦν primum ac ultimum duratio quædam intercedit, juxta quam tempus extenditur. Ac inter motûs initium & finem medium quiddam decurso spatio

II.

Phys. Vl. 1.

περὶ ἀτόμων γραμμῶν.

ſpatio reſpondens jacet. Numeri verò eadem eſt, quæ magnitudinis, quam denominat & repræſentat, extenſio; binarii ſcilicet quo linea bipalmaris exprimitur, duorum ad palmorum longitudinem extenditur; binarius quo bijugerus ager effertur, ad duorum jugerum latitudinem exporrigitur. Cùm igitur ex conceptibus noſtris ab experientia deſumptis ſatis appareat, omnem magnitudinem & quantitatem aliquatenus omnem extendi, licebit Mathematicis hanc ſupponere, quáſque poſſunt ab ea ſuppoſita conſequentias elicere: valebúntque v.g. tales hypotheſes: inter deſignata puncta ſumatur media linea: inter expoſitas lineas jacet media ſuperficies: inter ſuperficies extremas concipiatur interjecti corporis aliquid: inter duo inſtantia medii temporis quiddam intelligatur: inter duo momenta ponatur aliquid intercepti ponderis: inter duos terminos aliquid porrigatur intercurrentis motûs. Et ejuſmodi quævis adimmanturi haud illicitæ ſuppoſitiones. Sed de Extenſione hactenus. Illam conſequitur altera magnitudinis affectio, Compoſitio; hoc eſt, quod magnitudo conſtet in ſe diverſa, vel conſtat ex alio ac alio. Nam quoniam extenditur, & diſtant ejus extrema, non eſt tota ſimul; unde deſignari poteſt aliud atque aliud in ipſa, adeoque componitur ex alio ac alio, hoc eſt ex partibus; nam magnitudo quatenus componitur è diverſis in ea contentis dicitur totum, iſta verò diverſa partes appellantur. Pari modo cùm ſingula dictarum partium non ſit tota ſimul, (nam ſi tota ſimul foret, cum totius magnitudinis extremo,

III.

mo, vel cum adjacentis sibi partis extremo coincideret, adeóque non esset medium quid, nec aliud, nec pars) ergo itidem designari potest in ea aliud atque aliud, adeóque componitur ipsa ex aliis partibus, & hæ pariter ex aliis, ac ita ad infinitam, hoc est quousque libuerit eam è partibus minutioribus compositam imaginari. Unde consectatur magnitudinem quamvis ex homogeneis sibi magnitudinibus conflari atque constitui, lineam è lineis, superficiem è superficiebus, corpus è corporibus; non verò lineam è punctis, aut superficiem è lineis, aut corpus è superficiebus. Nam puncta, dicis causâ, respectu lineæ præterquam quòd nil aliud sint, ut supradictum, quàm negationes ulterioris extensionis, & vix aliquid obtineant positivi; & præterea ceu termini connotent aliquid interjectum, sicut sibi nequeant immediatè cohærere, totúmque quicquid est lineæ simul cogitetur inter ipsa; sunt etiam indivisibilia, ac idcirco si duo supponantur adposita sibi, toto sui contingent se mutuò, hoc est coincident & coëxistent, nec adeò quid habens extrema vel extensum constituent. (Ita ratiocinatur Philosophus; Ὅπου τε γὰρ ἥπτοντο ἐν ἐκὶ μεγέθει τὰ ἐν ᾧ μέγεθος, καὶ πάντα ὁμοῦ ἦσαν οὐδὲν ἔτι τὸν μεῖζον τὸ πᾶν διαιρεθέντος γὰρ ὃς δύο καὶ πλείω, οὐδὲν ἔλαττον οὐδὲ μεῖζον τὸ πᾶν τοῦ πρότερον· ὥστε κἂν πεῖσαι συντεθῶσιν, οὐδὲν ποιήσουσι μέγεθος. de Atomis loquitur) eadem est ratio lineæ respectu superficiei, & hujus respectu corporis. Quin & eodem modo tempus ex temporibus, non ex instantibus; motus ex motibus, non ex tendentiis indivisibilibus; velocitas

De Gen. & Corrupt. l. 2.

locitas ex velocitatibus, & pondus ex ponderibus, neutrum ex gradibus vel impetibus absolutè minimis; numerus ex unitatibus, illæ ex fractis partibus, non ex cypharis, constant & integrantur. Ex his etiam liqueat ubivis in linea sumi posse punctum, ubivis in superficie lineam & punctum, ubivis in corpore superficiem, lineam, & punctum, pro arbitrio. Nam quia partium corporis infinitarum (vel indefinitarum, hoc est plurium quavis multitudine determinata) aliqua desinit ubivis aut incipit, ubivis habetur ejus terminus superficies, in hac partem aliquam terminans linea, in ea partem aliquam terminans punctum. Nec ab his abludit conceptus noster & sensus communis (ad hunc enim sæpius appellandum est, quoniam is testis est & index experientiæ, in experientia verò fundantur hypotheses, ut toties inculcatum) nam nullam omnino magnitudinem concipimus nisi ceu compositam ex partibus, nec has partes nisi quadantenus extensas, adeoque conflatas ex partibus. Penitus incompositum, positivè in materiatis, sicut omnem sensum, ita prorsus omnem fugit imaginationem. Igitur compositionem hanc, & quicquid eam immediatè consequitur supponere licet Mathematicis, quales sunt quas subsequentis, huic arctissimè connexæ, proprietatis declarationi subjungam, suppositiones, nè cogar eadem repetere. Nam Compositionem excipit ejus individuæ comes & conjux Divisibilitas. Quoniam enim, ut modo ostensum, magnitudo componitur ex partibus revera distinctis, hæ possunt separatim existere, possunt saltem seorsim

IV.

seorsim considerari, hoc est re vel mente dividi, seu in partes resolvi. Quare quanti definitionem hinc extruit Philosophus? Τὸ διαιρετὸν εἰς ὑπάρχοντα, ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἔν τι, καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι. *Quod dividi potest in ea quæ insunt, quorum utrumque (nempe si tantùm duæ sunt partes) vel unumquodque unum quid, idque determinatè aptum natum est esse.* Adeò scilicet intimà est quantitati divisibilitas, ut ex ipsa videatur commodè definiri. Quod sanè communibus hominum conceptibus apprimè congruit. Nam indivisibile quantum verbo tenus asserat non nemo, sed nullus, opinor, ejus imaginem animo depingat: cum divisibilitate mentem effugit extensio, cum partibus totum evanescit. Τί γὰρ ἐστιν ἅπερ τὴν διαίρεσιν διαφεύγει; merito sciscitatur Philosophus (*Quid illud est quod divisionem respuit?* Planè nihil.) De tota magnitudine valet hoc; de partibus etiam quibuscunque pari ratione valet; sicut omnes conflantur ex partibus, ita possunt omnes in partes alias ac alias resolvi: nullum datur in quacunque specie magnitudinis absolutè minimum. Quicquid dividitur in partes dividitur iterum divisibiles (Λέγω δὲ συνεχὲς, τὸ διαιρετὸν εἰς αἰεὶ διαιρετὰ, Arist.) Non ignoro, siquidem nemo ignorat, doctrinam hanc à nonnullis gravatim admitti, ab aliis planè rejici, magnaque passim pertinaciâ de perpetua quantitatis divisibilitate, déque compositione magnitudinis (an ex indivisibilibus, an ex partibus homogeneis) controversiam agitari; scio multis involutam difficultatibus, multis obnoxiam contradictoriis argutiis, ob intervenientem præsertim

Met. IV. 13

De Gen. & Corrupt. l. 2.

Phys. VI. 1.

sertim infiniti nobis haud perfectè comprehensibilem conceptum. Tot illas tricas evolvere, tot salebras explanare, tritam adeò vexatámque, prolixam atque perplexam, quæstionem aggredi non est mihi nunc animus; integrum volumen accuratè pertractata compleret; nimiam curam exposceret & longiorem moram, quàm ex usu foret ei jam impendere. Sufficiat quòd perpetua divisibilitas, & compositio quantitatis ex partibus homogeneis communibus, ut innuimus, hominum idæis bene respondeat; quòd ipsam præstantissimi plerique Philosophi posuerint & propugnârint. (Plato imprimis, si fides Aristoteli; Πλάτων ἄπειρα δύο ἐποίησεν, ὅπερ ἐπὶ τῶν ἀνίσων δοκεῖ συμβαλλειν, καὶ εἰς ἄπειρον τεμεῖν, καὶ ἐπὶ τῶν καθ' ἑκάτερον. Aristoteles ipse multis in locis, Phys. Ausc. VI. 1. de Gen. & Corrupt. I. 2. & peculiari libello perquam erudito, περὶ ἀτόμων γραμμῶν, non tantùm asserit, sed valide probat; tota schola Stoicorum, & in iis acutissimus Chrysippus, ei suffragati dicuntur. Recentium quoque Philosophorum subtilissimus Cartesius calculum suum adponit, & nedum divisibilem esse materiam in partes infinitas, sed actu dividi, argumento Physico, ex peractis continuis per circulorum excentricorum inæqualia interstitia motibus deprompto, penè demonstrat. Accedit omnium Mathematicorum necessarius consensus; quamvis enim vix hoc usquam apertè supponunt, sæpe tamen tectè sumunt, & nisi verum sit, ipsorum corruunt pleræque demonstrationes. Sumunt, inquam, ut in definitione rectæ lineæ, seu dicatur ex æquo suis interjecta punctis, *Phys. III. 8.*

ſeu definiatur breviſſima linearum, quæ duci poſſunt ab uno puncto ad aliud. Nam quo modo linea duobus punctis conſtans, inter ſua puncta jacet omnino? Et ſi ſumatur circuli ſemidiameter conſtans, ex adverſantium mente, tribus tantùm punctis, erit illa æqualis lateri hexagoni iſti circulo inſcripti, ſextans verò circularis circumferentiæ non attinget quatuor puncta (aliàs enim tota circumferentia punctis 24 conſtaret, adeóque quadrupla foret diametri, contra manifeſtiſſimas Archimedis demonſtrationes, & communem ſenſum quo circumferentia circuli perimetro circumſcripti quadrati minor dignoſcitur) atqui ſi ſextans peripheriæ non attingat quatuor puncta, neutiquam (juxta indiviſibilia propugnantium hypotheſin) excedet tria; non erit igitur ſubtensâ ſuâ major; nec proinde recta linea brevior erit omnibus, quæ inter eadem puncta duci poſſunt lineis. Similis conſequetur difficultas, ſemidiameter circuli 5 punctis conſtare ſupponatur; nam peripheria 60 graduum non attinget 6 puncta (aliàs integra peripheria contineret 36 puncta, hoc eſt, diametri triplum & ſemiſſem excederet, quod itidem communi ſenſui facilè demonſtretur refragari). Quæ certè ſola conſideratio ſufficiat evertendæ contrariæ ſententiæ, ſaltem ejus cum Mathematicis principiis manifeſtè declarat repugnantiam. Item cùm à puncto quovis ad quodvis punctum ſupponitur duci recta linea, quomodo conſiſtat id cum indiſtantia, vel immediata punctorum cohærentia? Quinetiam quòd aſſumitur duas rectas lineas à concurſu ſtatim divaricari, ſeu di-

discedere à se invicem, nec præterquam uno se puncto secare, nec habere communem aliquam partem, extra punctum intersectionis, hisque cognata, ab indivisibilium positione manifestè destruuntur; ponatur enim circuli circumferentia constare quotlibet punctis, ad quæ singula ducantur è centro radii, liquet evidentissimè plurium circulorum concentricorum peripherias, aut totidem è punctis quot ille prior constari, adeóque ipsam adæquare, quod absurdissimum, aut istos radios alibi quàm in centro se contingere, sibimet occurrere, vel intersecare se mutuò. Et quod ad conclusiones attinet Geometricas, quomodo bisecari potest recta linea constans punctis imparibus? quomodo linea quævis possit in tot partes æquales secari in quot alia quælibet secta supponitur? quomodo si trianguli crura sint utlibet inæqualia, per majoris quotlibet puncta duci possint ad basim parallelæ, quæ minoris crus pertranseuntes non coincidant, intersecent, aut contingant seipsas, contra parallelarum naturam & definitionem? Et si crura baſe longè majora sint, quomodo parallelæ crescant uniformiter, seu proportionem cum interceptis ad verticem crurum partibus conservent eandem, ut basim multo non excedant, quæ tamen minores sunt, etiam ipso sensu judicante? quomodo in eadem recta indefinitè producta sumptis centris quotlibet, puta millies millenis aut utlibet pluribus, per terminum dictæ rectæ descripti circuli se in uno tantùm puncto contingant, juxta manifestissimum Geometriæ præceptum, ut non clarissimè consequatur indè, rectam quantumvis minimam contactui vici-

nam circulorum istorum circumferentias secantem punctis secari indefinitè multis; adeóque potentiâ infinitis vel innumeris? quomodo, secundùm adversarios, inter duas rectas unam puta 7, alteram 9, punctis constantem reperiri possit media proportionalis, vel ad easdem 7 & 9 tertia proportionalis exhibeatur? Nequicquam adinveniendæ mediæ super conjunctas illas tanquam diametrum constituatur semicirculus, & à segmentorum communi termino erigatur perpendicularis; nec enim illa poterit esse proportione media inter dictas rectas, cùm juxta positionem adversam nulla talis dari possit. Quomodo non tollatur funditùs omnis magnitudinum ἀσυμμετρία, quam tot exemplis ostendunt, tot demonstrationibus muniunt Geometriæ? Cùm communis omnium magnitudinum mensura punctum existat, habeátque se magnitudo quævis ad aliam, sicut numerus punctorum ad numerum punctorum, si lineæ constent è punctis, & superficies è lineis, & è superficiebus corpora. Quomodo non pessum ibit universa de lineis asymptotis, mirabilis equidem, sed nullâ Geometriæ parte minùs certa vel clara doctrina; quæ magnitudinis infinitam divisibilitatem aut invictè confirmat, aut unà concidit, utpote quâ minima quæpiam linea continuo ad infinitum decremento non exhauriri, neque continuo ad infinitum incremento datam, paulo majorem, adæquare lineam, perspicuè demonstratur? Quomodo denique non omnis auferatur motuum quoad velocitatem differentia? Nempe si mobile punctum uno tempore quinque percurrat puncta, quomodo possit alterum eodem tempore conficere sub-

ſubduplum, ſubtriplum, aut ſubquadruplum, ejuſce ſpatii, quum totum in iſtas partes dividi nequeat? Infinita poſſem excogitare, & adſerre talia, quibus oſtendatur ab iſta compoſitionis ex indiviſibilibus aſſertione totam concuti, proſterni, penitus ſubverti Geometriam; nil in ea ſani vel ſolidi relinqui, ſed immanem & deplorandam ruinam, confuſionem, ἀσυστασίαν in diviniſſimam iſtam induci ſcientiam*; cujus tamen effata, præter evidentiam principiorum & diſcurſuum rigorem, ita cùm admiranda (qualis falſis ſeu principiis ſeu ratiociniis obvenire nequit) inter ſe conſonantia, tum perpetuo exquiſito cum experientia conſenſu firmè ſtabiliuntur, ut mundi citiùs cardines emoveantur loco, rerumque machina collabatur, quàm Geometriæ fundamenta (τὰ θεῖα τῆς γεωμετρίης ἀξιώματα) labefactentur, aut ejus concluſiones falſitatis arguantur. Sed dimittenda nobis eſt hæc quæſtio, poſtquam admonuero breviter, præcipua quæ contra perpetuam quantitatis diviſibilitatem adferuntur argumenta, vel petitione principii laborare, vel falſis ſuppoſitionibus inniti, vel parum ad rem pertinere. Objecit Epicurus, in ſuarum atomorum gratiam & patrocinium, ſi partes magnitudinis infinitæ ſint, magnitudinem ex iis conflatam intelligi non poſſit finitam. Quid hoc eſt aliud quàm petere τὸ ἐν ἀρχῇ, vel idem per idem aſtruere? Hoc enim ipſum quæritur, an finita magnitudo (nam de infinita non agitur)

* Οὗτος γὰρ τοῦ λάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστα κινήσειε τῶν Μαθημάτων. *Ariſt. de Cælo l. 5.*

Τῷ μὲν γὰρ ἀληθεῖ πάντα συνάδει, τῷ δὲ ψευδεῖ ταχὺ διαφωνεῖ τὸ ἀληθὲς. *Ariſt. Eth. l. 8.*

agitur) possit habere partes infinitas. Id verò dicit adversarius non potest esse, nequit intelligi. Magis appositè rogâsset explicationem modi quo fiat, quàm ita fieri non posse concluſisset. Cui quæstioni responderem, quòd rationi quidem adversatur, ut magnitudo finita partes habeat aliquotas (centesimas puta vel millesimas) infinitas, imò repugnat ut habeat harum plures quam centum vel mille; sed quòd partes habeat plures millesimis millies acceptis, vel plures partibus alio quovis numero denominatis, non equidem video quomodo repugnet, imò potiùs perspicio quòd rationi consentiat optimè. Certè quòd sicut integri numeri possint ad infinitum augeri κατὰ πρόσθεσιν, ita fracti possint ἀνθυφόρως diminui τῇ καθαιρέσει (quod nempe sicut concipitur aliquis ultra millenarium numerus, eodem modo concipiatur aliqua pars infra millesimam) signum est magnitudinis, quibus respondent, utroque pariter modo versus infinitum vergere. Quinimo quòd infinita series fractionum certâ qualibet proportione decrescentium æquetur certo numero, vel unitati, vel unitatis parti, (v.g. quòd talis series decrescentium proportione subsesquialtera æquetur binario, decrescentium ratione subduplâ æquetur unitati, decrescentium ratione subtriplâ æquetur semissi unitatis) satis clarè docetur & ostenditur ab Arithmeticis, unde non repugnat finitum aliquod infinitas in se partes continere: præsertim cùm numero nihil conveniat, quod non potiori jure convenit magnitudini, quam numerus repræsentat ac denominat. Et sanè ferè tollit om-

omnem difficultatem imaginandi quo pacto possit evenire, quòd res finita conflari possit ex partibus infinitis, si modo consideretur, prout adcrescit multitudo partium, ita pari passu reciproce ipsarum magnitudinem decrescere. Ut si tres partes habeat illarum singula non est nisi tertia pars totius, si quatuor non nisi quarta; sic ut ipsarum parvitas multitudinem compenset. Sed urget Epicurus, vel ejus nomine Lucretius:

Præterea nisi erit minimum, parvissima quæque
Corpora constabunt ex partibus infinitis.

[Rectè, quid inde?

Ergo rerum inter se summam minimámque
quid escit?

Nempe futurum putat, admissâ nostrâ hypothesi, ut minimum quantum adæquet maximum, ut granum papaveris æquiparetur toti mundo, nec musca amplitudine cedat elephanto; quia pariter ista cum his partes continent infinitas. Sed hæc argumentatio nil efficit: quid enim obstat quo minùs exigua res tot habeat partes minores, quot amplior alia majores obtinet; ut solidus in tot denarios, quot in uncias libra distribuatur; ut tot octantes pes, quot ipsum miliare stadios complectatur? Quidni sicut universus terrarum orbis ad arenam, sic arena se habeat ad aliam arenulam, ut quoties ille contineat istam, toties ista comprehendat hanc? Cùm mundus ipse respectu alterius mundi, quem Deus condere potest, major non sit quàm hic ipse respectu minutissimi pulvisculi vel arenulæ. Igitur constare potest utrumque (quod majus & quod minus est) ex partibus infinitis, sed illud ex majoribus, hoc ex

minoribus; tantâ scilicet proportione minoribus, quantâ totum hoc illo toto minus est. Sed instant porro, saltem ex assertione nostra sequi, quòd infinitum infinito sit inæquale: numerus quippe partium in linea bipedali duplus erit infiniti numeri partium existentis in linea pedali; siquidem numerus ille quisquis est hunc evidentissimè bis includit. Absurdum autem videtur infinitum excedi, contineri, multiplicari. Respondeo etiam, in hoc adversariorum argumento palmario principium repeti; hoc est, idem ex eodem aliis verbis prolato deduci. Numerus enim infinitus nil innuit aliud, quàm id cui tribuitur posse dividi, vel concipi divisum in infinitum; id quod nos asserimus utrique lineæ tam pedali quàm bipedali convenire, non obstante quòd illa sit hujus dupla; negant hoc ὅτι ἐξ ὑποθέσεως sub aliis verbis, at nihil in contrarium subdunt novi argumenti. Certè numerus (sicut multoties inculcatum, & mihi persuasissimum est) numerus, inquam, seu finitus seu infinitus, nullam ex se vel æqualitatem vel inæqualitatem habet alterius numeri respectu, nisi quatenus uterque generis ejusdem magnitudinem designat & repræsentat; quare dicere numerum hunc infinitum majorem esse illo numero infinito, & hoc absurdum pronunciare, nil est aliud quàm dicere magnitudinem hanc, quæ concipitur ad infinitum divisa majorem esse illâ, quæ concipitur etiam ad infinitum divisa, & hinc absurdum consequi, hoc est, nostram thesin negare, sed illam aliquâ novâ machinâ non oppugnare. Præterea, quòd nullatenus absurdum videatur

tur infinitum infinito contineri (infinitam dico magnitudinem infinitâ magnitudine, vel infinitum numerum infinito numero comprehendi: nam si ponatur, in ſpatio quod nemo ferè non imaginatur immenſo, protendi infinita linea recta; in illa procul dubio continebuntur infiniti numero pedes, & infinitæ orgyæ, & infiniti ſtadii: item illa infinita recta ſæpius continebitur in infinita ſuperficie, & hæc innumeris vicibus in infinito ſolido corpore. Nec abſimiliter in æterna duratione facilè concipiantur infiniti anni, infinitiores dies, hiſque pluries infinitæ horæ, & infinitiſſima momenta. Dices poſitiones iſtas impoſſibiles eſſe, & ἐνὸς ἀτόπου δοθέντος πολλὰ συμβαίνειν. Reſpondeo, cùm adverſarius ex infiniti natura ſtruat argumentum, licet ipſum ſupponere; & quanquam ipſius rei poſitio fortè ſit impoſſibilis, conſecutio tamen perceptibilis eſt & manifeſta, nempe quòd neutiquam (ut volunt illi) infiniti naturæ repugnat in altero infinito contineri: ùti licet impoſſibile ſit hircocervum exiſtere, ſatis evidens eſt hircocervi notioni non adverſari quòd pedes habeat aut cornua. Saltem valuerit hoc ad homines, Epicureos intelligo propugnatores atomorum, qui ſuum κενὸν magnitudine ſtatuebant immenſum, ſuas atomos infinitas multitudine. Εἶναι αὐτὸ τὸ κενὸν ἄπειρον, καὶ τὰ σώματα ἄπειρα, ſtatutum ab Epicuro refert Plutarchus in placitis) & atteſtatur Lucretius:

——*patet ingens copia rebus*
Finibus exemptis in cunctas undique partes.

Quo

Quo posito clarissimè liquet infinitum numerum infinito numero, spatium infinitum infinito spatio, vel de facto comprehendi. Nam in infinito numero atomorum continentur infiniti numeri octonarii, magis infiniti quaternarii, infinitiores binarii, & unitates infinities infinitæ. Paritérque de spatiis. Objecit denique Zeno contra nostram sententiam, infinitis partibus constans spatium non posse successivè pertransiri, adeóque per eam motum è rerum natura tolli. Tribus verbis repono, rectè sequuturum hoc, si mobile supponatur infinitè tardum; at si velocitatem habeat aliquantam, illa cuidam spatii determinatæ parti respondebit, quàm adeò designato tempore mobile poterit emetiri. Moneo quæ contra compositionem ex indivisibilibus dicta sunt, illos pleraque spectare, qui magnitudinem constitui volunt ex indivisibilibus numero finitis; quæ sententia Geometricis decretis magis adversatur. Cum quibus fortasse conciliari potest, nec aliàs quàm loquendi modo differt opinio Galilæi, & aliorum ei συμψήφων, ex infinitis ipsam atomis compositam censentium. Sed istam sententiam missam facio; (etenim si quæ mihi cogitanti obveniant omnia minutatim excuterem, in immensum redundaret sermocinatio nostra. Complura vobis ut maturiori judicio vestro corrigenda, sic & diligentiore curâ supplenda linquo). Cæterum nè tumultuaria hæc disputatio provehatur in infinitum, haud dissimulo nec diffiteor ab intellectu nostro difficilè capi, quomodo dividi possit unaquæque pars, sic ut actu divisæ omnes non ad indivisibilia,

vel

vel ad nihilum aut nihilo proximum aliquid redigantur; nec tamen ideo propter imperfectam conditionem humanæ mentis, & captûs nostri tenuitatem, deserendam esse sentio tot manifestis indiciis compertam, tot argumentis firmissimis suffultam veritatem. Egregiè Aristoteles; Ἀλλ' ἄτοπον ἴσως τὸ μὴ δυναμένους λύειν τὸν λόγον δουλεύειν τῇ ἀσθενείᾳ, καὶ προσέχειν πατᾶν ἑαυτοὺς μείζους ἁπάντας, βοηθοῦντας τῇ ἀδυναμίᾳ· h. e. *Equidem rationi dissentaneum est, quòd instantias omnes repellere nequeamus, infirmitati nostræ servire vel succumbere; majorésque nos in errores conjicere, quòd minoribus angustiis nos expedire nequeamus.* περὶ ἀτ. γρ.

Cui non absimili prudentiâ succinit Cartesius; Quamvìs quomodo fiat indefinita ista divisio cogitatione comprehendere nequeamus, non ideo tamen debemus dubitare quin fiat, quia clarè percipimus illam necessariò sequi, ex natura materiæ nobis evidentissimè cognitæ, percipimúsque etiam eam esse de genere eorum, quæ à mente nostra, utpote finita, capi non possunt. Maneat igitur omne quantum componi è partibus compositis, & dividi posse in partes iterum divisibiles, & proinde Mathematicis licere quaslibet eis fundamentis hypotheses superstruere. Tales nempe; A majori quavis magnitudine subduci posse æqualem cuilibet minori. Inter duas homogeneas magnitudines inæquales utcunque desumi posse mediam aliquam ejusdem generis. Ubivis in linea sumi posse punctum, in superficie punctum & lineam, in corpore punctum, lineam, & superficiem, pro lubitu. Quamlibet magnitudinem habere partes homogeneas numero quovis de- *Princip. II. 34.*

denominabiles, decimas putà, centesimas, millesimas, &c. nec abhorrere à ratione, si speculandi gratiâ quomodocunque divisa supponatur. Et consimiles his; nec enim jam omnes hypotheses enumerare, sed ipsorum duntaxat fontes aperire propositum habeo. Supersunt alia magnitudinis attributa, quæ nunc persequi tempus vetat.

LECT. II.

CUM instituti discursûs filum eò me pertraxerit, ut Mathematicarum hypothesium gratiâ, de magnitudinis affectionibus & symptomatis communioribus disputem, & de nonnullis quæ se primùm obtulerant (terminatione nimirum, extensione, compositione, divisibilitate) pro rerum dignitate pauca, pro nostro proposito satis multa disseruerim, supereſt ut reliqua deinceps perstringam, occupationem spatii, positionem determinatam, mobilitatem, mensurabilitatem, proportionem, & si qua occurrerint alia, de quibus Mathematici depromunt, aut legitimè depromere possunt hypotheses ratiociniis suis accommodatas. Imprimis magnitudini solet attribui quòd occupet & repleat spatium. Quid verò sit hoc spatium difficile sit exponere. Nam an detur necne spatium aliquod ab ipsa rerum magnitudine distinctum, si vel ad conceptus vulgares attendamus, aut subtiliores Philosophorum excutiamus sententias, haud in proclivi sit sta-

ſtatuere; adeò repugnantes ſententiæ cum ſpecioſis nituntur argumentis, tum gravibus urgeri videntur incommodis. Imprimis nullum à rebus quantis reverà diſtinctum exiſtere ſpatium iſta videntur arguere ſatis manifeſtè. Primò, quòd ſi ſit improductum & independens, æternúmque proinde & immenſum ſit oportet (nam præterquam quòd à ſpatii realis aſſertoribus tale plerumque concipitur & ſupponitur, ſi tale non ſit ceſſabit omnis ratio, propter quam dari ſupponatur, ut ejus conſtituendi cauſas expendenti liquebit) atqui dari quid eximiorum iſtorum divinæ naturæ attributorum particeps, à Deo quoque non creatum nec dependens, tam rectæ rationi diſcrepare, quàm à pietate videtur abhorrere. Tum ſi ſpatii quæcunque ſit idæam examinemus, nihil in ea præter extenſionem quandam, & capacitatem indefinitam deprehenſuri videmur; quæ cùm ipſius magnitudinis ſint proprietates, ſpatii nullum à magnitudine diſcrimen arguunt, cur enim re differant, quæ proprietatibus congruunt? Non Carteſii modò, ſed ipſius Ariſtotelis eſt hæc argumentatio: Ὡς εἰ τὰ τόπῳ (inquit Philoſophus) μηδὲν διαφέρει, τί δεῖ ποιεῖν τόπον τοῖς σώμασι παρὰ τὴν ἑκάστου ὄγκον; *Si magnitudo rerum à ſpatio nihil diverſum habet in ſe, quamobrem diſtinguitur à ſpatio ſuo rei cujuſpiam moles?* Porro, ſpatium ſi quod eſt à magnitudine differens, ſciſcitamur in qua rerum claſſe reponatur. Cùm enim res omnis aut ex ſe ſubſiſtat, aut accidat alteri, neutrum iſti ſpatio convenire videtur. Non ad ſubſtantiæ dignitatem ipſius patroni ſpatium evehent, nec res ipſa patietur. *Phyſ. Auſc. IV.* 12.

tur. Sed nec accidens est, quoniam omni substantiæ extrinsecum est, & cum ea non circumfertur, eâque sublatâ permanet; & ab alia nulla re pendet. Prætereo Zenonis istam argutiam; quòd res omnis sit alicubi, spatium ergò si sit aliquid ab aliis distinctum, alicubi existet; unde spatii spatium erit, & hujus secundi spatii spatium aliud, & sic in-
Phys. IV. 3. finitè; quod ludicrum est. (Ἐι πᾶν τὸ ὂν ἐν τόπῳ, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ τόπου τόπος ἔσται, καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον πρόεισιν; ut est apud Philosophum in Physicis). Ejusmodi ratiociniis impugnatur spatii realis à magnitudine diversitas: at non minùs validis in speciem argumentis astruitur. Nam primò, communes hominum conceptus appellando, videtur omnibus aut innata vel alicunde conquisita no-
Phys. IV. 1. tio spatii à rebus distincti. Τὰ ὄντα πάντες ὑπολαμβάνουσιν εἶναι πῦ, inquit Aristoteles: h.e. Omnes ubi rerum animo separant ab ipsarum Esse. Quinimo vulgus hominum imaginari consuevit ὑψιστάμενόν τι, commune quiddam cunctis rebus substratum, quod infinitè distendatur, & nullis circumscribatur limitibus, quod omnino penetrabile sit, & facillimè quidvis in se recipiat, nec ullius in se rei refugiat subingressum; quod mobilium successiones excipiat, & motuum velocitates determinet, & rerum distantias metiatur; quod immobiliter fixum sit, etiam quoad omnes sui partes nulli rei alligetur, nusquam aliò transferatur; quod immensæ denique sit capacitatis vas & conceptaculum
Phys. IV. 6. (ἀγγεῖον ἀμετακίνητον, ait Philosophus) universa complectens in se quæ sunt, & quæ possunt existere. Tale quid omnes ferè mor-

mortales phantasiis suis insculptum habent. Et quod revera tale quid existat, præter hunc imaginandi consensum, permulta videntur arguere. Quorum vis ut pateat, & aliquid efficiat, præstruendæ sunt aliquæ theses aut assertiones, quibus suffulciuntur adducenda pro spatii realitate ratiocinia. Primò, materia non est infinitè extensa, saltem quod proposito nostro sufficit, haud necessariò talis est. Nam unde necessitatem istam habeat? an à se? Non pium hoc, cùm Deo cunctarum rerum originem toties disertis verbis ascribant sacræ literæ; (Τὰ πάντα δι' αὐτοῦ καὶ εἰς αὐτὸν ἔκτισαι· οὗ ἕκτισας τὰ πάντα, καὶ διὰ τὸ θέλημά σου εἰσὶ καὶ ἐκτίσθησαν· τὰ πάντα δι' αὐτοῦ ἐγένετο· ἡ χεὶρ μου ἐποίησε ταῦτα πάντα· id est, Quicquid uspiam est rerum, exceptâ nullâ: innumera passim occurrunt talia). Nec ulla ratio suadet, ut à se potiùs infinitam, quàm infinitam habere credatur subsistentiam: an à Deo? Quis ei (agenti liberrimo & independenti) necessitatem imposuit, ut infinitatem tribueret materiæ? Quo liquet indicio revera tribuisse? Num potuerit haud disputo (quis enim divinæ potentiæ limites assignet?) At longè credibilius videtur, ut reliquis rebus vires & potentias præfinitas indidit, ita certos ipsum materiæ terminos statuisse. Id quod etiam sacrosancta scripta satis perspicuè videntur attestari. Ecce (semel ac iterum dicit Rex sapientissimus) non cœli, ne quidem cœli cœlorum capiunt te: hoc est, angustior est tota rerum universitas, quàm ut Deo coexistat; extimos ille rerum fines transcendit; adeóque materia non est de facto ad infinitum

Eph. III.9. Col.I.16. Apo.IV.11 Job.I.3. Isa.LXVI. 1,&c. Act.VII. 50.

II Chron. II.6. VI.18.

tùm protensa, nedum ut necessariò talis est.

Princ. II. 21. Regeret Cartesius, *Ideo necessarium esse, ut materia infinitè protendatur, quoniam ubicunq; finea ejus fingamus, semper ultrà ipsos aliqua spatia indefinitè extensa non modò imaginamur, sed etiam verè imaginabilia*; *hoc est, realia esse percipimus, ac proinde etiam substantiam corpoream indefinitè extensam in iis contineri*; *quia scilicet idæa ejus extensionis, quam in spatio qualicunque concipimus, eadem planè est cum idæa substantiæ corporeæ.* Verùm hæc ratio subtilior videtur quàm solidior. Nam primò materiam actu infinitam nemo concipit, aut concipere potest; indefinitè verò protensam concipere, nihil est aliud quàm ejus terminos non attingere, vel nullos ei certos limites in animo defigere; sicut vulgus hominum telluris planitiem indefinitè protractam existimat, aut astans maris littori, incerto limite definitum æquor cogitat; vel sicut arenas maris indefinitè multas concipimus. Porrò, ex eo quòd ultra præstitutas quascunque metas spatia quædam imaginari possumus, nullo pacto sequitur actu materiam aliquam ulteriorem existere. Id saltem verisimiliter colligatur, ideo posse talem existere; quia nempe quicquid nos ut evidenter possibile percipimus, id valet divina potestas effectum reddere. Enimvero innumera nos imaginari posse, quæ nec sunt, nec erunt unquam, quis mentis compos inficias ierit? Nil repugnat, & facilè possem imaginari, non secus ac è vulgo quilibet, uti adnotatum modò, tellurem ad summas cœli oras, & extrema mundi mœnia pertingere; possim Solem millies majorem, Lunam multis parasangis pro-

propinquiorem, ſtellas plurimis vicibus numeroſiores, & ſexcenta talia factu neutiquam impoſſibilia, neque penitus abſurda, mecum animo volutare, quæ tamen an idcirco vera erunt de facto? non certè magis quàm ſomnia quævis, aut ægrorum deliria. Imaginabilitas igitur quantumlibet realis ad ſummum rei poſſibilitatem aliquam, non actualem exiſtentiam ullatenus coarguit. Ex imaginatione non infinitus actu, ſed utcunque potentiâ finito (determinate finito) major mundus comprobetur. Verùm ut penitus agnoſcamus, ſumma ſua ſubtilitas hac in cauſa quantopere deſtituit & fugit Carteſium, imaginationis iſtius de ſpatiis ultramundanis noſtræ perſcrutemur & paulo perpendamus originem; illam certè, ſicut alias pleraſque non aliunde quàm ex ſenſibus noſtris hauſtam comperiemus. Cùm quippe nil ferè quicquam ſenſu quovis attigerimus, quin aliquid ultra ſitum pariter ſenſibile progrediendo fuerimus experti; præſertim cùm ad cœlum oculos elevando vaſtum undique κεῖνον nullo perceptibili limite concluſum, & in ignotas nobis regiones procurrens intueamur, hinc immenſum quendam, ſeu indeterminatum cœleſtis ſpatii gurgitem, in quo nubes pendeant, venti diſcurrant, ſtellæ ceu piſciculi natent, noſtrâ in phantaſia deſcribendi nobis obrepit occaſio; à qua tamen ſenſione, vel ab imaginatione confuſa eam excipiente, perabſurdum videtur de vera mundi, ſeu finita ſeu infinita, extenſione quicquam inferre vel decernere. Nam omnis ſenſio eſt ſingularium, ab exiſtentia verò rei ſingularis compertam licet

quidem deducere, quòd aliud quid simile possit existere, non autem quòd aliud quid actu sit vel existat, ut aliquoties admonitum est. Taceo quòd eodem jure paríque ratione, quibus materiæ necessaria tribuitur extensionis infinitas, eidem æternitas & independentia tribuantur; nam prout ultra quoslibet mundi limites aliquid spatii, sic ante quodvis initium. Post quemvis finem aliquid temporis æquè clarâ cogitatione solemus imaginari; æterna proinde necessariò, & consequenter etiam independens. Secundum hunc argumentandi modum materia demonstretur; quæ tamen divinæ perfectionis idiomata periculosum sit, & Christiano Philosopho summopere cavendum, alteri quàm Opt. Max. Deo adscribere. Ratum igitur fixúmque sit materiam, seu molem corpoream non esse penitus interminatam, saltem non esse talem necessariò. Hoc primò supponatur. Adsumatur quoque secundò, quòd Deo competat potestas, prout adlubescet ipsi, materiam existentem adaugendi vel imminuendi, hoc est, è nihilo procreandi quantum velit, & quamlibet ejus portionem in nihilum redigendi. Jubet hoc fides, cogit pietas admittere; nec reclamat ratio, sed potiùs suffragatur & suadet. Nam ex eò quod concipere possimus materiam ampliorem quávis præfinitâ, nil obstat quo minus, imò satis evidenter inde consectatur, quòd Deus omnino valeat id effectum dare. Quòd si potest ampliare, pari potestate potest minuere, quámque de novo pertexuit telam eadem facilitate retexere valet; quinimo quia nobis contractiorem imaginari fas est,

est, imò nullam supponere, divinæ potentiæ subjacebit illud præstare. Ad hæc tertiò facillimè concipitur, & nulla ratione negari debet, posse Deum quamcunque rem in suo quem nunc obtinet statu sitúque conservare, sic ut à nullis extrinsecus accidentibus immutetur intrinsicè, nedum ut ejus natura penitus destruatur: ut nempe recta linea, plana superficies, circuli circumferentia, sphærica orbicularitas tales permaneant, quicquid extra illas fieri contingat, hoc est, tametsi circumjacens omnis materia quomodocunque mutetur, tollatur, aut annihiletur. Quibus pro jure nostro legitimè suppositis, atque substratis spatii qualiscunque realitas à magnitudine distincta multis adstrui modis videtur. Primò, cùm materia possit esse finita, Deus autem essentiâ sit infinitus, ultra materiæ fines subsistet, aliàs ejus limitibus clauderetur, aut finiretur utcunque, nec esset propterea infinitus. Ergo datur aliquid ultra, hoc est, spatium qualecunque. Et nisi Deus ultra materiæ fines existat, posset imaginatio nostra locum confingere, ubi non est, adeóque divinæ existentiæ modum aliquatenus transcendere, nec immensum proinde Deum concipere possemus aut agnoscere. Tum Deus extra hunc possit alios mundos condere, sicut & nos conditos imaginari, non illos quidem nullibi, sed alicubi; dabitur igitur spatium aliquod, in quo collocari possint & consistere. Novis quoque productis mundis intererit Deus, absque eo tamen quòd omninò moveatur (immobilitas enim est & immutabilitas omnimoda, est indubitatum divinæ perfectionis attributum)

id quod aliter intelligi nequit, quàm concipiendo præsentem antea fuisse spatio, in quo jam reponuntur. Ergo quos habemus, aut habere debemus, de divina infinitate, potentia, immutabilitate conceptus spatii qualemcunque distinctam realitatem involvunt. Porro, materialis mundus ex hypothesi quam asseruimus terminatus aut terminabilis, aliquâ figurâ præditus erit, & proinde quâvis figurâ præditus supponi potest. Sit ergo sphæricus; & quod etiam supponere licet, statuatur alius eum contingens itidem sphæricus; is priorem unico puncto continget, igitur inter alia sphæricarum puncta medium quid, hoc est, aliquid spatii, interjacebit. Sumantur enim in contiguarum sphærarum superficiebus duo puncta quælibet, extra contactum, hisce dico spatium aliquod interjici; si neges, ergo duo ista puncta sese contingent, contra clarissimè demonstratum in Geometricis theorema. Item connectantur duo sphærarum istarum centra rectâ lineâ per contactum, ut Geometria quoque docet ac probat. transeunte, ductaque intelligantur e centris ad dicta extra contactum duo puncta duo radii; quoniam igitur ex adversariorum sententia dicta puncta sibi contigua sunt, è tribus rectis constituetur triangulum, cujus duo latera tertio adæquantur, itidem contra clarissimum & certissimum Geometriæ theorema. Rursus supponatur ubicunque in massa corporea duæ sphæræ concentricæ, ipsarúmque superficiebus interjacens materies annihiletur, aut amoveatur allò (id quod à Deo præstari potest ex præstratis) ergò hæ superficies, si nihil intercedat spatii,

ſpatii, ſibi coincident, etſi millies iſta major ſit hac (ſupponamus enim ex antedictis quòd utraque ſphærica ſuperficies ſuam retineat magnitudinem, non obſtante medii corporis evacuatione, quæ extrinſecus accidit, & nihil in illis internum mutat; ipſarum utcunque magnitudinem & poſitionem ſartas tectas conſervante divinâ potentiâ). Eodem modo ſi verticem inter & baſim pyramidis quicquid intereſt medium auferatur, quando nihil ſpatii relinquitur, ipſa quoquam modo disjungens, punctum verticis adjacebit proximè punctis omnibus baſis, adeóque toti baſi congruet & adæquabitur. Hæc & innumera talia conſectari videntur ex negatione realis ſpatii, communibus hominum conceptibus non minùs quàm Geometricis decretis repugnantia. Præterea duriuſculum videtur, ut mundana materia quoad ſe totam planè ſtatuatur immobilis, aut poſito rei dilucidandæ gratiâ, præter unam ſolidam ſphæram nihil uſpiam exiſtere, quòd iſta ſphæra ne quidem à Deo transferri poſſit, aut circa axem rotari; neque περιφορὰν (ut Platonicis utar vocabulis) admittere. Id quod ſatis infert manifeſte ſublatio ſpatii. Nam quum in hoc utrovis motu, partes eundem inter ſe retineant ſitum, eandémque diſtantiam, quomodocunque feratur totum, non aliter concipi poteſt ipſum moveri, quàm ex ſpatii ſucceſſiva mutatione, ſcilicet ut una pars ſpatium ſubingrediatur à priore derelictum, unde negato ſpatio tollitur ejus mobilitas. Stringit hoc quod alicubi notat Ariſtoteles; Ὅπου γὰρ ἂν ἐνδέχοιτο ὁ τόπος, εἰ μὴ κίνησίς τις ἐστὶν ἢ χωρὶς τόπου· διὰ τοῦτο γὰρ τὰ ὑρα-

ὑραγὸν μάλιστα διόμεθα ἐν τόπῳ, ὅτι ἀεὶ ἐν κινήσει· i. De loco vel ſpatio diſquirendi ſolus præſtat occaſionem motus, (qui ſcilicet abſque ſpatii poſitione vix concipi poteſt) cœlúmque præ omnibus potiſſimè videtur eſſe in loco, quia maximè movetur: nec tamen id (reſpectu primi præcipuíque motûs diurni, quem reſpicere videtur Philoſophus) ſecundum partium ſitum ac diſtantiam ullatenus variatur, at quaſi tota circumfertur. Eatenus ergò movetur aut non movetur omnino, quatenus partes ejus ſpatia ſua permutant, quæque nunc Eoas plagas obſident, mox eædem meridianum culmen attingunt, ipſúmque confeſtim prætervectæ veſpertinas ad oras declinant. Neque ſufficiet hîc actionem à motu ſecernere cum Carteſio, quando præter ſpatii mutationem nullus cogitari poſſit actionis iſtius effectus. Unicam hiſce ſuperaddam ratiuncúlam: Quæro quid efficiat ut inter duo diſtantia corpora facilis ſit commeatus, proclivis itus reditúſque; annon quia medium his interjicitur ſpatium eis intro recipiendis paratum? Quid contrà faciat, ut difficile poſſimus inter duo contigua corpora medium aliud intrudere, imò non poſſimus omnino niſi motum illis imprimendo ſatis validum, quo procul amandentur, & à ſe invicem ſejungantur; annon quia deficit interſtitium medii corporis capax? Supponatur, e.c. inter duo corpora A, B corpus aliud C reſidere, tum intelligatur hoc corpus C amoveri, ſic ut non permittatur aliud ſuccedere, ablatâ ſcilicet corporum circumſtantium propenſione ad motum, vel inhibito parumper effectu (per ſu-

ſuperiorem potentiam) ex eo ſecundum adverſarios immediatè, nullâ aliâ vi adhibitâ, nullâ actione interveniente, reſultabit corporum A,B contiguitas arctiſſima; ſymplegadum inſtar ſponte ſuâ collidentur, & continuò nullus hiatus relinquetur; adeóque difficilimum evadet, ut corpus C impetu converſo ſe in priorem locum reſtituat, vel corporibus A,B rurſus intercedat, niſi corpora iſta validâ virtute disjungantur. At vix intelligi poteſt, cur tantopere vis major requiratur ad tantillùm ſemovendas res ſibi contiguas, quàm ad quantâlibet diſtantiâ ſeparatas ſibimet admovendas; quamobrem tam ultroneè coëant, tam dirimantur invitè: quid in cauſa ſit quòd priorem ſtatum nullo negotio, nullo cum motu deperdant, in eùndem vix niſu vehemente, motu multo reponantur; cùm ſicut à Thebis Athenas, & ab Athenis retro Thebas eadem ſit via, ſic ad conjungenda quæ diſtant, & reciprocè disjungenda quæ aſſident, vis eadem, par motus, ejuſdem ſpatii pertranſitio poſtulari videatur. Quinimo ſubobſcurum eſt illud quamobrem juxta contrariam ſententiam eodem inſtanti, quo corpus medium elabitur, non confeſtim attingant ſe ripæ, & non ſucceſſuræ materiæ præcludatur intergreſſus; cùm vix infinitè velox, nedum tardus (quales in natura pluſculi dantur) & teſtudineus ſufficere videatur motus ei congreſſui præveniendo, utpote cùm hîc nullam actionem deſiderat, & per meram inſtantiſſimè reſultantiam emergat. Quòd ſi faciliùs, aut citiùs coaluerint corpora terminantia, quàm intercurrentis materiæ pars

ingruens præcedentem assequatur, obstruatur oportet omnis fluxus, & motus sistatur ac auferatur, id quod nemo nescit quàm perpetuæ discordet experientiæ. Annon simpliciùs & clariùs expediantur hæc dicendo, propterea per adjacentium corporum commissuras iter perrumpi difficiliùs, eò quod deest intervallum, quo corpus influens recipiatur; sed inter nonnihil dissitos corporum terminos idcirco promptum haberi transitum, quia campus exporrigitur medius, penetrabilis & capax ingressuri tanti corporis; adeóque si depleatur vasculum non collabi latera, nec si repleatur divelli (quum impossibile videatur illud, & hoc minimè necessarium) sed positionem eandem, eandem intercapedinem, eandem capacitatem invariatè retineri. Prætereo quas pro vacuo spatio (seu coacervato, seu corporibus interspersо) rationes adducunt & experimenta physica, tum quia nimium in his etiamnum contrivi temporis, & adhuc operæ multum deposceret illorum examinatio, tum quia plerasque salvi vel utcunque possent eludi per materiæ subtilis, motûs circularis, & indefinitæ divisibilitatis non absonas adeò, nec inconcinnas hypotheses. Ita fermè disceptatur utrinque; quid ergo tandem statuemus? quomodo conciliabimus has adversa fronte pugnantes verisimilitudines & undique circumsidentia nos incommoda declinabimus? Nihil ego certè, nihil in re tam ardua lubricaque pro vero venditem, aut asseverem confidentiùs; at si dicendæ sententiæ necessitas incumberet, & quid vero mihi videatur simjljus in medium cogerer producere, ne conceptibus

ceptibus hominum nimis adverſarer, & ſacroſanctis Geometriæ ſcitis impingerem, dicerem primò ſpatium revera dari, diſtinctum à magnitudine; hoc eſt, illo nomine deſignari quid, ei conceptum reſpondere, fundatum in re, alium à conceptu magnitudinis, ac ita quidem ut ubi non exiſtit magnitudo, quamvis ea non exſiſteret omnino, ſpatium nihilominus extiturum. Dicerem ſecundò, ſpatium non eſſe quid actu exiſtens, actúque diverſum à rebus quantis, nedum ut habeat dimenſiones aliquas ſibi proprias, à magnitudinis dimenſionibus actu ſeparatas. Quid ergo erit? quid ſibi vult hic griphus? Non admodum mihi placeo, nec audeo ſperare me vobis ex reſponſo meo ſatisfacturum; at quia dicta lex eſt reſpondeo, ſpatium nihil eſt aliud quàm pura puta potentia, mera capacitas, ponibilitas, aut (vocabulis iſtis veniam) interponibilitas magnitudinis alicujus. Mentem meam explicatam do: olim ante conditum mundum, nullum alicubi corpus exſtitit (ut credere fas eſt & pium) at potuit etiam tum exiſtere quantumcunque corpus, potuit hoc determinatam poſitionem obtinere, volente ſcilicet & effectore Deo: hoc eſt, fiat ſpatium. Ultra molem mundanam nullum corpus excubat, nulla reperitur actualis dimenſio; verùm poteſt ultra ipſam corpus aliquod conſtitui, aliqua realis dimenſio extendi, hoc eſt, datur ſpatium ultramundanum. Inter hos parietes omni per divinam potentiam excluſâ diſtentâque materiâ, nullum corpus jacebit, at poterit aliquod reponi hoc eſt, datur ſpatium illis interjectum. Inter duas denique magnitudines

tudines adjacentes seu contiguas, nulla magnitudo potest interponi; hoc est, nullum datur inter ipsas spatium aut intervallum. Potest inter duas istas turres protendi funiculus decempedalis, hoc est, datur inter ipsas spatium seu distantia decempedalis. (Ubi potest obiter adnotari spatii cujuslibet singularis naturam esse quodammodo determinatam, & quodammodo indefinitam; determinata quidem quoad Mathematicam speciem & quantitatem figuræ suæ (est enim capacitas non omniscunque, sed talis & tantæ magnitudinis) indefinitam quoad alias qualitates, & physicam speciem, nec non quoad individuitates, ut ita loquar, magnitudinum; (est enim capacitas cujusvis magnitudinis tantæ talique figurâ præditæ: inter latera nempe vasis cubici spatium habetur recipiendo cuivis tanto cubo seu aqueo seu aereo; non verò potest adæquatè occupari, vel repleri à corpore pyramidali vel sphærico, neque majorem cubum admittet.) Hinc non denotatur spatii vocabulo διάστημα, quodvis positivum, actuali dimensione præditum, actu extensum ex se, vel divisibile, vel terminatum, vel pertransibile, vel congruum corporibus; at solummodo notat & significat corpus aliquod taliter extensum, eo modo figuratum, tali mensuræ adaptabile, vel simul unâ vice, vel successivè per motum existere posse. Non actualem aio, sed naturæ tantùm suæ consentaneas agnoscit figuras, dimensiones, partes, nempe potentiales; hoc pacto, capacitas admittendi corporis alicujus includit capacitatem admittendi (respectivè) lineas & superficies; potentia lineam

neam quadrupedalem interponendi continet potentias interponendi lineam pedalem, & bipedalem, & tripedalem, & alias minore numero denominatas. Potentia circulum interſerendi potentialem, implicat rotunditatem perfectam. Neque quantum aut quale ſit ſpatium immediatè vel ex ſe primò determinari vel agnoſci poteſt, nec niſi per menſuram, aut determinationem magnitudinis alicujus realis ipſam occupantis; ut v. g. ſpatium duabus urbibus interjectum quantum ſit aliter dignoſci nequit, quàm deſignatæ ſuper terram (vel aerem tranſeuntis) lineæ quodam pacto longitudinem emetiendo. Nec ideò merum nihil eſt aut temerè confictum hoc nomen, ſicut hircocervi vel chimæræ, ſed in eodem entium ordine, quo creabilitas, ſenſibilitas, mobilitas, & cujuſmodi poſſibilitates, merito jure reponendum (iſtis verò nemo ferè non aliqualem adjudicat realitatem) nec fermè video cur hujuſmodi ſpatium non æquè ſit ens, ac ipſa contiguitas, cui directè videtur opponi. Contiguitas enim eſt modus magnitudinum ſignificans nullam ipſis motu ſecluſo interponi poſſe magnitudinem; ſpatium verò contrà modus earundem, quo innuitur aliam magnitudinem interponi poſſe, vel adponi; quamvis loco neutiquam emoveantur. Hac autem ſpatii notione ſuppoſitâ conceſsâque licebit utriuſque prædictæ ſententiæ nodos ſolvere, difficultates amoliri. Nam imprimis nihil hinc divinæ perfectionis prærogativis decedit, ens aliquod ſubrogando, realiter æternum ac infinitum, non productum, & non dependens à Deo; ſed aſſeritur potiùs

tiùs ipſius illimitata poteſtas, corpora pro lubitu ſuo producendi diſponendique. Neque coincidet hujus talis ſpatii idæa cum idæa magnitudinis, aſt ab ea tantum quantum ab actu potentia differet atque diſtabit. Nec alia præter ſubſtantiam & accidens entia nova refert in cenſum, ac realis mundi donat civitate, ſed utriuſque modum duntaxat aliquem, & poſſibilitatem connotat. Nec alium locum deſiderabit hoc ſpatium; quia nuſquam actuali modo exiſtit, at ubique ſaltem erit ſuo modo, quia Deus ubique poteſt magnitudines collocare. Neque diſconvenit hoc cum communi ſenſu ac ſermone hominum, qui cùm ſpatium intercedere cogitant aut pronunciant, nihil intelligunt aliud, quàm inter deſignatos terminos poſſe corpus aliquod interponi. Nec materiæ deducatur hinc infinitas ulla, ſed utcunque talis extenſio conſequetur, qualem ei Deus ultro volet aſſignare. Nec ubiquitati divinæ derogat omnino, quæ nil aliud ſignificat, quàm omni ſpatio Deum adeſſe, vel ubicunque res aliqua poteſt exiſtere. Cum Geometria verò conſpirat & congruit ad amuſſim; nec enim depoſcit hæc, ut inter duo puncta, vel duos quoſcunque terminos medii quid actu reale ſemper intercedat, at ſaltem nonnunquam (in aliquibus caſibus) ut linea, ſuperficies, aut corpus poſſit intercedere. Satisfacit etiam Phyſicorum experimentis & phænominis, vacui tantum eis præbens, quantum ſufficit recipiendis corporibus, & motibus ſuis peragendis, nec tamen aliquid immiſcens fictitii vacui veris actualibus dimenſionibus induti, quale partem mundi dimidiam,

midiam, corporumque principium cum aſſeclis ſuis ſomniavit Epicurus. Ut præteream quomodo pateat hinc, quòd immobile ſit ſpatium, neque cum corporibus aſportetur; quia nempe cùm corpus unum alterorum confinium aut interſtitium deſtituit, remanet nihilominus iſta poſſibilitas, & nihil hinc obſtat, quin alia corpora æquè vicina, pariter intermedia ſubſtituantur & ſuccedant. Obiter adnoto quam deſcripti ſpatii notionem illi, quam tradit D. Hobbius ſpatii, definitioni penè videri è regione contrariam. Spatium is definit, *Phantaſma rei exiſtentis quatenus exiſtentis.* At ſi ſpatium eſt phantaſma (ut ſanè non eſt, ſed objectum phantaſmatis, imaginabile quid, non ipſa imaginatio, nec imaginationis effectus) phantaſma potiùs erit rei ſeu poſſibilis, quàm ut exiſtentis. Quippe cùm ſpatium concipimus, magnitudinem aliquam poni, vel exiſtere poſſe, non ſemper actu poſitum aut exiſtens concipimus, ut ante mundum conditum, vel extra mundum præſentem, ſecundùm prædicta. Quod & ipſius præmiſſis ratiociniis magis convenit, quàm ejus propria, quam ex iis colligit, definitio. Nam confecto rerum omnium interitu, remanſurum affirmat in animo ſpatii phantaſma; atqui fingere res omnes ſublatas, & eaſdem velut exiſtentes cogitare ſunt ἀσύμφατα· reſtabit potiùs idæa rerum ceu poſſibilium. Quin ipſe totidem verbis ait. *Nemo ſpatium ideo eſſe dicit quod occupatum ſit, ſed quòd occupari poſſit*; à vero non abludens, ſed à ſeipſo diſſentiens: ſpatium enim per occupationem quodammodo definit eſſe ſpatium, quatenus per actum *Cap. VII. de Corp.*

actum potentia velut extinguitur. & ceſſat ulteriùs poſſibile, cùm quid jam exiſtit: nec male vulgò dicitur in vaſculum repletum nihil infundi poſſe, propter defectum ſpatii. ſed me neſcio quæ blanda Siren quantumvis refugientem allicit, & ſcopulis ſuis affixum, caſſibus ſuis irretitum detinet; ad interioris Matheſis portum velis omnibus remiſque contendenti remoram injicit hæc qualis qualis ἐξωτερικὴ philoſophia. Ut hanc de ſpatio περιέκτικῳ nimis equidem prolixam & ſpatioſam, aliquando claudam, & ceu figuram terminis circumſcribam, unicum ſolummodo propoſito meo conducens inſuper monebo, quòd nempe quicquid Phyſici ſtatuant, hæc quam hactenus deſcripſi ſpatii concipiendi ratio cùm optimè quadrat, tum abundè ſufficit Geometris; ſi quid majus ineſſe deprehendatur, aut attribuatur illi, neutiquam id iis officiet; aſt nil amplius deſiderant, quàm ut talis concedatur intercapedo, quâ figuræ magnitudinum, ſalvis ſuis proprietatibus, incolumes perſiſtant, ut hæ per poſſibilem annihilationem aut remotionem, non confundantur aut perverantur. E. g. Si duo circuli vel duæ ſphæræ ſeſe contingant, & accipiantur, ut ſupradictum eſt, duo extra contactum (in circumferentia circuli, vel in ſphæræ ſuperficie) puncta, flagitat Geometria non ut aliqua realis & actualis linea recta duobus iſtis punctis interjaceat, ſed tantùm ut potentialis quædam intercedat, hoc eſt, ut aliqua duci vel interponi poſſit, vel ut ſeſe non contingant, ſiquidem repudiato tali interſtitio vel adſerto punctorum iſtorum contactu, circulorum & ſphærarum natura pe-

perimitur, proprietates peſſundantur. Tale ſpatium igitur indulgeri debet Geometris, ipſorum hypotheſibus ſubſternendum; eóque magis id quoniam congruentia, commenſuratio, determinata poſitio, motus, & ipſa quadantenus proportio magnitudinum cum eo cohærent, per id explicari poſſunt. Nam congruentia per ejuſdem ſpatii poſſeſſionem, menſuratio per applicationem aut ſucceſſionem congruam, ſitûs determinatio, motúſque per ſpatii identitatem, & alterationem commodè deſcribuntur, & quomodo pendeat ab his, his adhæreat, per hæc elucidetur proportio, poſthac forſan apparebit. Ex dictis, ut hæc accommodemus inſtituto noſtro, licebit Mathematico tales hypotheſes procudere. Ponatur hoc aut illud ſpatium poſſe occupari, hoc eſt, quòd inter deſignata puncta, datas ſuperficies, expoſita corpora (quæ nempe propter naturæ ſuæ proprietatem, aut ex præcedanea quapiam ſuppoſitione ſeſe non contingunt) linea, ſuperficies, aut corpora (reſpectivè) poſſint interponi. Viciſſimque ponatur quamvis magnitudinem ſpatium occupare, hoc eſt, ipſam inter contiguas magnitudines non poſſe collocari, ſed adjacentes utrinque magnitudines ab ipſa dirimi & elongari, pro modo poſitæ magnitudinis. Ponatur etiam nullum uni ſingulari magnitudini ſpatium alligari, ſed ab innumeris aliis (pro modulo ſuo, ac magnitudinum circumpoſitarum exigentia) poſſe ſucceſſivè, ſicuti res ferret, adimpleri. (Eſt enim ſpatium, ut antehac expoſitum) non peculiaris aliqua, ſed quodammodo generalis & indefinita capacitas) nec non reciprocè,

quòd

quòd nulla magnitudo ſingulari cuipiam ſpatio aſtringetur. Adhuc ponatur, vel ut conſectarium è dictis axioma utcunque affirmetur, Quod plures magnitudines idem ſpatium nequeant ſimul occupare (adæquatè ſcilicet). Nam actus plures etiam plures arguunt potentias; vel unus actus unicam potentiam penitus explet ac exhaurit; ergo plures magnitudines plura requirunt ſpatia, vel una magnitudo totam unius ſpatii conſtitutivam capacitatem devorat. Sicut exiſtentiam Petri totam Petri poſſibilitatem complet & quaſi ſatiat, efficiens ne poſſit alius idem numero Petrus exiſtere. Item quâ ratione plures aliquæ magnitudines unum ſpatium occupant, eâdem quotlibet aliæ poſſent idem illud ſpatium occupare; unde tota magnitudinis poſſibilis infinitas in unum hordeacei grani ſpatium poſſit coarctari; quod abſonum & abhorrens videtur à ſana ratione. Demum ex eo quod idem ſpatium obtineant magnitudines, terminationem etiam & extenſionem, & reliquas his connexas magnitudinis affectiones poſſidebunt eaſdem. adeóque plures illæ prorſus evadent eædem; præter enim iſtas affectiones quod magnitudinem conſtituat aut diſtinguat, nil fermè quicquam concipimus, aut opinor concipere poſſumus. Cæterum quod hæc poſtrema ſuppoſitio (ſeu quis malit axioma) pronunciat & præ ſe fert, exprimi ſolet impenetrabilitatis vocabulo, cui nonnulli primas partes deferunt inter omnia magnitudinis attributa, quàm meritò viderint ipſi; mihi nulla προσωποποιία placet, omnéſque reciprocæ affectiones pari loco ſunt.

ſunt. Id tantùm nobis ex uſu fuerit advertere poſitionem ejus (ratione ſubnixam, ut vidimus, & experientiæ quantum ſcimus perpetuæ conſentaneam) Mathematicis eſſe perneceſſariam. Ei ſiquidem innititur quicquid ex corporum pulſione, ſeu vi pulſiva, deducitur in Mechanicis; quicquid ex motuum dependentia ſuboritur in Geometria (qualis eſt illa à Carteſio excogitata elegantiſſima curvarum linearum deſcriptio, in ejus Geometria, quæ regularum truſione vel impulſu certa ratione ordinato peragitur) quòd ſi plures magnitudines idem ſpatium ſimul poſſent occupare, vel quod perinde dicatur, una poſſit aliam penetrare, non una neceſſariò cederet alteri, ſed immota perſiſtens alteri tranſitum præbere poſſet, unde vana foret pulſionis ſuppoſitio, nullus reſultaret (ex ſcientifica ſaltem neceſſitate) effectus. Itaque neceſſariò ſupponitur à Mathematicis magnitudinum impenetrabilitas, ideóque non abs re fuit illius cum ratione conſenſum, quódque non illicitè ſupponi debeat, oſtendiſſe. Pari jure vice versâ ſupponi poteſt, quòd nulla ſingularis magnitudo plura ſimul ſpatia poſſit occupare. Nam unus actus pluribus potentiis ſatisfacere nequit; nec poſſibilitas ut Petrus & Socrates exiſtant, ſolâ Petri exiſtentiâ completur. Item qua ratione ſingularis una magnitudo plura ſpatia poſſideat, eâdem quibuſcunque ſpatiis poſſidendis ſufficiat. Poſſit igitur granum papaveris, aut arenulæ minutiſſimæ magnitudo quicquid uſpiam eſt ſpatii replere, totíque poſſibilis magnitudinis infinitati coextendi; quod nemo ſanus in animum facilè inducat

cogitare. Ut præteream, quòd eadem magnitudo plura ſpatia occupando plures extenſiones, terminationes, & reliquas magnitudinis affectiones ſortiretur, unde non una magnitudo perſtaret, at in plures evaderet. Nec inutilis eſt hæc ſuppoſitio, ſed perquam neceſſaria Mathematicis. Non ex ea dependet quicquid ab illis de poſitione determinata ſupponitur aut demonſtratur. Nam quomodo, e. c. non fruſtra ſupponitur aut oſtenditur punctum aliquod intra vel extra circulum quempiam exiſtere, ſi poſſit ſimul intra ac extra exiſtere? Quomodo dicatur iſta linea cum hac talem aut tantum angulum efficere, ſi poſſet alium ſitum tunc una obtinens alium quemvis angulum conſtituere? Quomodo recta curvam tangere demonſtretur ex eo, quòd tota præter unicum punctum contactus extra curvam cadat, quum non repugnet ſimul in illa, vel etiam intra illam jacere? Quomodo denique punctum aliquod non eſſe centrum circuli propoſiti comprobetur inde, quòd diametrum non biſecet, ſi propter varios poſſibiles ſitus poſſet idem punctum biſecare ſimul, & non biſecare diametrum? Quicquid igitur ſit de Theologia Pontificia, niſi vera ſit hypotheſis, eandem magnitudinem aptam natam non eſſe plura ſimul ſpatia occupare, penitus actum erit de tota Geometria. Sed de poſitione determinata quicquid obſervatu dignum eſt, non jam licet attexere; prout neque de reliquis aliis magnitudinum ſymptomatis, quæ ſequentibus aſſervanda ſuperſunt. Unicum inſuper monitum adjiciam, magnam temporis cum ſpatio cognationem,

&

& analogiam intercedere. Sicut enim ſpatium ad magnitudinem, ita ſe tempus habere videtur ad motum, ita ut tempus ſit quodammodo ſpatium motûs. Quum enim tempus dicitur (annus puta, menſis, vel dies) nihil aliud indigitari videtur, quàm talem aut tantum interea motum peragi, vel intercedere, vel interponi poſſe; ſcilicet una periodus Solis in Ecliptica, reditus unus Lunæ ad Solem, una cœli (vel terræ) circa ſuum axem revolutio. Sed hoc obiter, nam ut de tempore jam differatur pleniùs, ipſum tempus vetat & refragatur.

LECT. III.

DE natura ſpatii, déque nonnullis ei ſuperſtructis vel adnexis hypotheſibus Mathematicis, ſatis fusè diſquiſitum eſt in Lectione præcedente. Proxima magnitudinis affectio circumſpectantibus objicit ſe (quippe non ita procul à ſpatio diſſita, ſed ei propiùs adjacens) congruentia, cujus certè ſuppoſitio quodammodo primarius eſt tibicen, & præcipuum fulcrum totius Matheſeos. Nam ab ea æqualitatis (quæ quidem in Mathematicis utramque ferè paginam facit, & quam Proclus Πρῶτιστον ἐν τῇ τοιᾷδε συμπλοκῇ, principaliſſimum & quaſi primiſſimum in quantitate ſymptoma vocat) optimè meâ ſententiâ formalis ratio deſumitur; ſaltem ejuſdem de facto veluti potiſſimum κριτήριον, & palmarium adhibetur argumen- *Ad 4. I.*

tum. Id quomodo sit operæ forsan pretium fuerit ostendere. Quarta primi elementi propositio (quæ à Proclo Ἐν διαφήματι ἁπλούστατον & ἀρχοειδέστατον non admodum immeritò dicitur) comprobans æqualitatem duorum triangulorum habentium æqualia duo crura, hísque comprehensos angulos æquales (quoad omnia æqualitatem) demonstratur ex laterum & angulorum congruentia (adsumpto tantùm axiomate, duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt, vel potiùs hoc eodem recidente, Duæ rectæ lineæ terminos habentes eosdem congruent). Ab hac (adhibito duntaxat axiomate, eóque etiam per congruentiam demonstrabili (sicut post hoc ostendemus) si æqualibus æqualia addantur tota, vel si ab æqualibus æqualia subtrahantur residua sibimet exæquantur) demonstratur æqualitas triangulorum ac parallelogrammorum super easdem bases, & inter easdem parallelas constitutorum. Inde per axioma, Quæ eidem æqualia sunt, æquantur sibi mutuò (quod itidem axioma per congruentiam demonstrari potest) de parallelogrammis atque triangulis super æquales bases constitutis idem demonstratur. Ab his, adhibitâ solummodo præterea proportionalium definitione, deducitur parallelogrammorum & trigonorum æquè altorum cum suis basibus, vel æquales bases habentium cum suis basibus proportionalitas. Hinc æquiangulorum triangulorum similitudo, tum in æqualibus & unum angulum æqualem habentibus triangulis & parallelogrammis reciproca laterum (circa pares angulos) proportio, permutatímque

ex

ex reciproca proportione laterum æqualitas figurarum, aliæque reliquæ quæ præsertim in sexto continentur elemento planarum figurarum affectiones principales derivantur. Aliter etiam (non adhibitâ quartâ primi elementi) ex sola ferè congruentia deducantur istæ triangulorum & parallelogrammorum æqualitates atque proportionalitates supradictæ, per egregiam illam à Cavallerio non ita pridem in lucem usumque communem protractam methodum indivisibilium, fœcundissimam novorum in Geometria repertorum matrem. Cujus certè pulcherrimæ & utilissimæ methodi (sicut ejus author ipse non obscurè insinuat) fundamentum in congruentia ponitur, ex congruentia demonstratur, sicut apparebit primas libri de Geometria indivisibilium secundi, vel itidem primas aliquot Exercitationis primæ ejusdem auctoris, propositiones attentiùs inspectanti. Octava quoque primi elementi propositio (circa æqualitatem angulorum subtensorum æqualibus lateribus, in triangulis sibi mutuò æquilateris) quæ Geometricorum Theorematum est altera uberrima scaturigo, per omnem eam præsertim quæ circulorum affectiones speculatur Geometriam diffusa, demonstratur isthic, nec aliter demonstrari potest, quàm (immediatè scilicet aut mediatè) per hanc ἐφαρμογήν. Ut præteream particulares alias complures, quæ hujus suppositione ac subsidio nituntur demonstrationes, extantes apud Archimedem, Pappum, & alios insignes Geometras. Unde meritò vir acutissimus, Willebrordus Snellius luculentissimum appellat Geometriæ supellectilis in-

Snell. præf. ad Cyclometr.

instrumentum hanc ipsam ἐφάρμοσιν. Eam igitur in demonstrationibus Mathematicis qui fastidiunt & respuunt, ut Mechanicæ crassitudinis ac ἀνωφελίας aliquid redolentem, ipsissimam Geometriæ basin labefactare student; ast imprudenter & frustra. Nam ἐφαρμοσιν Geometræ suam non manu sed mente peragunt, non oculi sensu sed animi judicio æstimant. Supponunt (id quod nulla manus præstare, nullus sensus discernere valet) accuratam & perfectam congruentiam, ex eâque suppositâ justas & logicas eliciunt consequentias. Nullus hîc regulæ, circini, vel normæ usus, nullus brachiorum labor, aut laterum contentio, rationis totum opus, artificium & machinatio est; nil Mechanicam sapiens ἀνωφελίαν exigitur; nil, inquam, Mechanicum, nisi quatenus omnis magnitudo sit aliquo modo materiæ involuta, sensibus expositâ, visibilis & palpabilis, sic ut quod mens intelligi jubet, id manus quadantenus exequi possit, & contemplationem praxis utcunque conetur æmulari. Quæ tamen imitatio Geometricæ demonstrationis robur ac dignitatem nedum non infirmat aut deprimit, at validiùs constabilit, & attollit altiùs, ad sumptæ suppositionis realitatem ac possibilitatem, (quæ sanè genuinum est, ut sæpiùs innuimus, omniscunque scientiæ fundamen) ipsis ostentans sensibus, & rationis auctoritatem fulciens suffragio experientiæ. Virtutis adeò maximæ, non labis alicujus aut vitii demonstrationes accusant congruentiam adhibentes, qui Mechanicæ cognationem illis adspergunt; nil eis revera aliud quam familiaritatem & facilitatem eximiam, nimiarum

am evidentiam, & quasi nobilitatem exprobrantes. Sanè nec ipse Ramus, quanquam in veteres haud æquus adeò vel benignus quid hîc habet quod culpet, at calculum suum adponit perlibenter, & à congruentia ductam argumentationem vehementer adprobat, collaudat, usurpat. *Hoc*, inquit, *demonstrationis Euclideæ genus tam expeditum, idmque facilè, vehementer amplector.* Sed quid receptum communiter ac ab ipsis Geometriæ principibus & coryphæis (Euclide, Archimede, Apollonio, Pappo, aliísque) usurpatum demonstrandi modum contra sciolos nescio quos propugnatum eo? Quin ejus potiùs naturam, & qualis sit hæc congruentia Mathematica propiùs intueamur. Congruentiam per ejusdem loci vel spatii occupationem, possessionem, repletionem describi solet. Eam verò triplici modo factam concipere licet; per applicationem, per successionem, per mentalem penetrationem. Per applicationem, cùm una magnitudo superimposita vel apposita concipitur alteri, sic ut illam omnibus sui partibus immediatè contingat, & nusquam ab ea recedat aut separetur. Ut cùm mensura rei mensuratæ (virga putes mensoria telæ limbo, vel rectæ lineæ super terræ planiciem designatæ) applicatur & coextenditur; in qua applicatione partes unius longitudinis omnes alterius partibus exactè respondent, & aliæ alias immediatè contingunt, adeóque istæ sibi invicem congruunt hoc modo. Per successionem, cùm unius magnitudinis amotæ locum ingredi concipitur altera (veluti cùm effusâ aquâ è vasculo vinum infunditur) congruere dicantur

Schol. Math. lib. VIII. 170.

tur istæ magnitudines, ob identitatem spatii quod occupant successivè. Per mentalem penetrationem, cùm duorum corporum magnitudines per ejusdem loci simultaneam possessionem coalescere, coincidere, & tanquam coadunari cogitamus. Quo ferè pacto supponunt Perspectivæ scriptores inter oculum & objectum radians interpositam tabulam, velut ubique perspicuam, à lucido quasi cono vel pyramide penetrari, sic ut trajicientes radios nusquam impediat, at recipiat in se cunctos, eorúmque vestigia sibi velut impressa vel unita retineat. Ex hisce congruentiæ modis, quæ per applicationem fit ex parte rei, solis quadrat lineis ac superficiebus, quæ ob indivisibilitatem suam possent aliæ alias se totis immediatè contingere; & per hunc contactum seipsas quasi penetrant, & in unum coincidunt. Unde taliter congruas lineas & superficies (hoc est, ita sibimet adjacentes, ut medii nihil interjaceat spatii) pro unis habent Geometræ. Id voluisse videtur Euclides, cùm negavit à duabus rectis lineis spatium comprehendi; ut & quòd duo plana solidum spatium non concludunt. Et quæ plures lineas contiguas, aut se intersecantes terminant, puncta semper habent pro uno communi puncto; ut & quæ plures superficies conjunctas, aut se mutuò secantes dirimunt, extremas lineas pro una sumunt linea; & quæ corpora dispescunt superficies, in unam supponunt coalescere. Id sibi postulandum censuit Vitello, nempe cùm duæ superficies planæ contingunt, unam ex iis fieri superficiem. Paríque ratione circularis annuli peripheria con-

concava convexæ circuli concentrici inclusi peripheriæ, vel annuli sphærici concava superficies adjacentis sphæræ concentricæ convexæ superficiei coincidit. Corpora verò, propter introversum reductam profunditatem suam, solis externis superficiebus contiguæ fiunt, adeóque nullâ parte sui congruere possunt, hoc applicationis modo. Quapropter è recentioribus non nemo negavit iis ἐφάρμοσιν omnino competere. At saltem ad omnes universim magnitudines, quæ per successionem fit (mediante scilicet communi spatio) congruentia pertinet & extenditur. Quatenus nulla magnitudo cuilibet uni spatio, neque vicissim ullum spatium uni magnitudini peculiariter astringatur, & ab una derelictus locus ab alia tanta talíque magnitudine possit occupari. Mentalis denique congruentia magnitudinum, etiam solidarum (quicquid prædictus arbitretur Philosophus) haud absurdè supponitur à Geometris. Námque primò per eam non asseritur actualis seu realis penetratio, sed tantùm abstrahitur mente, vel in considerationem non venit corporum vis exclusiva penetrationem realem impediens: seu generalis & indefinita capacitas admittendi tanti corporis, quæ præcipua spatii proprietas est, per se sola separatim consideratur. Quem concipiendi modum sæpe falsitatis absolvit Philosophus; οὐδὲ γίνεται ψεῦδος, inquit, χωρίζοντων. *Phys. II. 2.* Secundò, mentalis ista penetratio non aliter supponitur à Mathematicis, quàm ut per eam destruatur realis penetrabilitas, & absurda demonstretur. Nam ex eo quòd supponatur duo corpora locum eundem

dem

dem occupare oſtendunt, eandem eſſe utriuſque magnitudinem, & proinde quòd ſe penetrando deſinant eſſe duo; adeóque quòd duo (formaliter duo) ſeſe nequeant penetrare. Licet autem quidvis utcunque falſum vel abſurdum ſupponere, quo meliùs iſta falſitas aut abſurditas dignoſcatur. Nec aliâ ferè ratione falſitatis argui poſſit ulla propoſitio negativa, quàm τῇ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ, hoc eſt, ex ejus veritate ſuppoſitâ conſequentia falſa detegendo. Sic igitur penetrationem hanc ἐξ ὑπονοίας ſuppoſitam adhibent Mathematici, prout adhibent illi, qui magnitudinis ipſam impenetrabilitatem, ex penetratione ſuppoſita, conantur demonſtrare. Ipſam enim uſurpant Mathematici duntaxat indicandæ vel comprobandæ magnitudinum æqualitati vel inæqualitati, hoc utique pacto: aſſero duas ſphæras æqualibus diametris deſcriptas æquari; nam concipiatur unius centrum alterius centro congruere, inde propter æqualitatem radiorum quorumcunque, uniuſcujuſvis extima ſuperficies alterius ſuperficiem non tranſcendet, ergò congruent totæ duæ ſphæræ, ergò magnitudinem eandem habebunt, hoc eſt, æquales erunt. Quòd ſi ponatur unius diameter alterius diametro major, congruentibus ut priùs κατ' ἐπίνοιαν centris unius ſuperficies ambiens alterius ſuperficiem excedet, (quippe quæ propter ſuppoſitos inæquales radios à communi centro longiùs diſtet) ergo non erit eadem utriuſque magnitudo; hoc eſt, ex propterea inæquales erunt. Quòd ſi quis fictitiæ huic penetrationi nihilominus moroſiùs obloqui pergat, ut ei fiat ſatis, adji-

cio

cio mentalem istam congruentiam concipi posse per modum successionis, intelligendo scilicet unum subduci vel evanescere, alterum in ejus locum substitui; hoc est, iisdem terminis interponi, vel eodem ambitu contineri; quomodo nihil suberit difficultatis, quin eo ferè modo concipiatur hæc penetratio, quo sphæra circa suum axem revoluta, seipsam quasi penetrat; quatenus ejus unæ partes in alterarum locum continuò succedant. E quibus patet, quòd congruentia nil sit aliud quam ejusdem spatii seu loci occupatio & completio, sive simultanea sive successiva; ex qua magnitudinum aliqualis resultat identitas, & in unum coalitio. Nam indivisibiles magnitudines, eò quòd (secundùm id quo indivisibiles sunt) applicantur sibimet invicem, simul idem spatium occupant, & quasi coincidunt; solidæ verò magnitudines omnifariam divisibiles revera per successionem, aut simultaneè per mentalem penetrationem in eodem concipiuntur spatio reponi; cúmque isto spatio quoad quantitatem unitam & identificatam, ejus interventu uniuntur & identificantur inter se. Sed ut hujus symptomatis indoles magis adhuc eluceſcat, adverto præterea congruentiam (eam præsertim quæ per ἐπίθεσιν facta concipitur) variis modis, & per aliquos quasi gradus intelligi posse peractam. Primò, sic ut totæ simul magnitudines situ partium nullatenus variato spatium idem possideant. Quomodo cunctæ rectæ lineæ, planæ superficies, æqualium circulorum peripheriæ, æqualium sphærarum superficies, similes in æqualibus circulis, cylindris, sphæ- 1.

ris

ris helices, & alia quæcunque perfectiſſimè ſimiles (hoc eſt, ſimiles & æquales) magnitudines congruere poſſunt. Hic ſummus eſt
2. perfectiſſimæ congruentiæ gradus. Secundò, ſic ut ſucceſſivè per partes, itidem non immutato partium ſitu, eidem ſpatio coincidant. Quo pacto rectæ lineæ figuræ cujuſlibet perimeter rectæ lineæ in continuum exporrectæ, & priſmatis ſuperficies ſuperficiei planæ in directum poſitæ poteſt adaptari. Qui proximus eſt quaſi gradus poſſibilis con-
3. gruentiæ. Tertiò, ſic ut omnia magnitudinis utriuſque indiviſibilia in eundem locum ſuccedant, útque etiam neutra poſitionem evariet partium. Quâ ratione dum rota vel circulus ſuper rectam lineam ei ſemper contiguam incedit motu progreſſivo, eodémque tempore circa centrum ſuum volutatur, ejus peripheria dictæ rectæ lineæ congruit ; puncta quippe cunctâ peripheriæ circularis omnibus rectæ lineæ punctis ordine continuè ſucceſſivo applicantur (quæ ex congruentia, ut hoc obiter moneam, manifeſtè perſpicitur aliquam rectam lineam peripheriæ curvæ circulari adæquari, adeóque circuli tetragoniſmum non eſſe naturâ ſuâ prorſus impoſſibilem ; id quod ſic exprimit ſupradictus acutiſſimus Geometra in Cyclometrico ſuo ; *Talis utique eſt Mechanica circuli cujuſque revolutio, donec ad idem peripheriæ punctum recurrat, unde circumduci cœperat ; quæ illud quidem arguit, & tanquam ob oculos ponit rectam aliquam lineam circuli perimetro revera æqualem exhiberi poſſe.* Parique ratione cùm cylindrus circa ſuum axem rotatus ſupra planam ſuperficiem progreditur, ejus

curva

curva ſuperficies dictæ planæ ſuperficiei exquisitè congruit. Omnes quippe quæ deinceps in cylindri ſuperficie diſpoſitæ jacent rectæ lineæ parallelæ, parallelis omnibus in plana ſuperficie rectis lineis continuâ indivulsâ ſerie applicantur. Quartò, ſic ut ſimul eundem locum occupent partium unius aliquatenus immutato ſitu, at ordine nihilominus conſervato, retentâque priori ſingularum contiguitate. Quomodo peripheria circuli, vel alia quævis curva, ſic diduci poteſt aut extendi, ut in rectam lineam tranſeat, adeóque rectæ lineæ congruat; & recta linea ſic incurvari poteſt, ut in peripheriam circuli, vel in aliam quancunque curvam degeneret. Paríque modo quævis curva ſuperficies in planam extendi, viciſsímque quævis plana ſuperficies in curvam inflecti poſſit. Et quidem (ut hoc nonnihil ulteriùs explicemus) in multis quomodo fiant è rectis lineis lineæ curvæ, & in quas hæ rectas reſolvantur; nec non è quibus planis oriantur curvæ ſuperficies, ſatis liquidò diſcerni poteſt; id quod curvarum linearum ἔνδυσις, curvarum ſuperficierum πλάτυνσις appelletur. E.g. quoad curvas ſuperficies; ſuperficies curva cylindri nihil eſt aliud quàm parallelogrammum rectangulum, habens baſim æqualem peripheriæ circuli, qui baſis eſt cylindri, eandémque cum cylindro altitudinem; cujus omnes lineæ rectæ baſi parallelæ in circulorum peripherias incurvantur: unde congruet cylindrica ſuperficies huic parallelogrammo, ſi latus aliquod cylindri (hoc eſt, aliqua recta ducta in ejus ſuperficie à baſe ad baſim) ad latus parallelogrammi applicetur, 4.

plicetur, & dehinc tota ſuperficies in planum diſtendatur; aut ſi applicato latere parallelogrammi ad latus aliquod cylindri planum ejus circa cylindrum circumflectatur, ipſámque velut inveſtiat, & contegat undiquaque. Conica ſimiliter ſuperficies nihil eſt aliud, quàm ſectator planus circuli radium habentis æqualem lateri coni, & arcum æqualem peripheriæ circuli, qui baſis eſt coni, cujuſque concentrici arcus in totidem perfectas circulares peripherias intorquentur. Vel potiùs aliter, conica ſuperficies nihil eſt aliud quàm triangulum rectangulum, cujus altitudo vel perpendiculum æquatur lateri coni, baſis peripheriæ circuli, qui baſis eſt coni, cujúſque baſi parallelæ omnes rectæ in totidem peripherias circulares ſinuantur. Sic & curva ſuperficies ſphærica (nec non alia quævis curva ſuperficies figuræ planæ non abſimili rotatu procreata) ad trilineum quoddam planum duabus rectis lineis angulum rectum conſtituentibus, & ſubtensâ lineâ curvâ comprehenſum facilè redigatur. (Id autem quomodo ſit, non eſt in præſens exponendi locus). At quoad curvas lineas, præter circuli circumferentiam, quæ nil eſt aliud quàm recta linea per omnes ſui partes ubique ſimiliter aut uniformiter inflexa; præter hanc, inquam, ſpiralis cylindrica, quæ reliquarum curvarum omnium eſt ſimpliciſſima, maximè uniformis & ὁμοιομερὴς, nihil eſt aliud quàm recta linea parallelogrammi ſupradicti (ad quod reducitur cylindrica ſuperficies) diagonio æqualis, & circa cylindricam ſuperficiem convoluta. De curvis aliis ad rectas redigendis, aut ad alias diverſi generis

neris curvas, jam conticeo, nè prolixior & simul obscurior sim, in re tantùm ex transcursu attrectata.] Ad hunc verò modum quoque pertinet, aut ei perquam affinis est ejusmodi congruentia, qualis capaces sunt æquales figuræ parallelis iisdem lineis aut planis inclusæ. Quarum omnes lineæ vel omnia plana in iisdem parallelis intercepta sunt æqualia. Ut duo triangula vel parallelogramma, non sibi mutuò æquiangula, vel duæ pyramides (prismata, coni, cylindri) inæqualiter inclinatæ, inter parallelas easdem lineas rectas, vel eadem parallela plana, & super æqualibus basibus constitutæ. Nam ut horum unum alteri congruat, debet situs partium unius ad alterius partium positionem accommodari, ipsarum tamen ordine non perturbato; nec earundem quæ priùs affuit contiguitate deperditâ. Quintus modus est, cùm ita peragi possit ἐφαρμογὴ, sic ut partium quarundam positio varietur & ordo pervertatur. Hic congruentiæ modus omnium imperfectissimus, & apprehensu difficillimus, convenit figuris homogeneis omnino sibi mutuò dissimilibus. Ut v.g. non aliter triangulum circulo, conus sphæræ congruant, quàm alterutrius partes transponendo, partem unius applicando parti alterius, & residui partem in uno parti remanentis in altero, & sic perpetuò, donec exhauriatur negotium, & unius omnes partes tandem alterius partibus evaserint applicatæ, quam rem qui distinctiùs expositam cupit, adeat consulo priùs insinuata Cavallerii loca. Ex his rem attentiùs experienti liquebit quaslibet ejusdem generis magnitudines sibimet in- 5.

invicem, hoc est, lineas lineis, superficies superficiebus, solida solidis aliquo modo, hoc est, vel totas simultaneè, vel per partes (aut per indivisibilia sua) successivè, retento partium situ, vel eo nonnihil laxato, saltem iis transpositis, fieri posse congruentes. Quaslibet, inquam, congruere posse sumendo congruentiam laxiùs, pro coincidentia quavis etiam inadæquata; quomodo minor linea recta, majori lineæ rectæ superimposita congruet ei, hoc est, ei toto, licèt non toti, coincidet. At verò strictiùs accepta congruentia solis tribuitur æqualibus magnis, quæ eundem præcisè locum occupant, & nec ejus terminos excedunt uspiam, aut ab iis deficiunt, at justè complent ipsum, & ipso continentur. Et quidem in aptitudine vel potestate sic congruendi, quæ subinde præditæ sunt magnitudines, nonnulli formalem constituunt ipsius æqualitatis rationem, & ipsam ex ea definiunt, equidem meâ sententiâ non malè. Ex antiquis magnus Apollonius in ea mente fuit, ut patet ex ea quam Proclus adducit & impugnat, demonstratione celebris pronunciati, quæ eidem æqualia. Quæ demonstratio scil. innititur huic æqualitatis definitioni, *Τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα εἶναι*· & nuper D. Hobbius nostras æqualia corpora definivit, quæ eundem locum possidere possunt; *Potest autem* (ait) *corpus aliquod locum occupare eundem, quem aliud corpus occupat, quamvis non sint ejusdem figuræ, si modò flexione & transpositione partium in eandem figuram redigi intelligatur.* Quæ ab Hobbio tradita vehementer exagitat, & perquam acutè refellere conatur ejus egregius

gius Elenctes; at me judice, nè verum dissimulem, haud penitissima cum efficacia. Nihilominus enim Apollonianæ sententiæ animo propiùs accedo, & æqualitatem ex possibili congruentia commodissimè puto definiri. Quamobrem ita sentiam, (quoniam id πρῶρσυ videtur, & ad res nostras aliquid faciat) adjungam non nullas rationes, neq; gravabor hanc rem aliquando curatiùs examinare. Id quod gradatim progrediendo satagam. Et primò quidem cùm subdubitari possit an ullam expediat æqualitatis definitionem assignare, minimèque necessarium id existimare videatur Aristoteles, ὁ πάνυ, propter æqualitatis ex se satis perspicuam notionem, & significatum nemini non abundè perspectum; (Τὰ πάθη, inquit Philosophus, μὴ λαμβάνει τι σημαίνει, ἂν ἢ δῆλον, ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινὰ οὐ λαμβάνει τι σημαίνει, τὸ ἴσα ἀποδίσειν ἀφελεῖν ὅτι γνώριμον· hoc est, *Affectiones non assumit* (id est, non explicitè docet aut exponit) *quid significent, ut neque communia* (id est, communium sententiarum vel axiomatum termini) *quid significent assumit* (aut explicat); *ut quid significet æqualia æqualibus subducere, quoniam id manifestum est*, & vulgò satis exploratum. Cùm, inquam, sic ambigi possit an debeat æqualitas omnino definiri, ego nihilominus rei Mathematicæ conducere reor, ut definiatur & explicetur distinctè quid per eam veniat intelligendum. Nam quum æqualitas sit ejusmodi symptoma, quod immediatè sensum non incurrit, nec experientiæ subjacet, at ex rerum instituta comparatione resultat (absque comparatione saltem à nobis non deprehen-

Post. I. 10.

ditur) & cùm res diversimodè possint inter se comparari, ideò requiri videtur, ut ex qua qualique comparatione, quando & quomodo resultare concipiamus æqualitatem, per certum aliquod argumentum, indubitatum σημεῖον, adnexum signum evidens & reciprocum definitione expressum determinemus; sic ut ejus insit nobis distincta notio, nec ulla possit emergere dubitandi vel dissentiendi causa. Nos quidem immediatiùs & frequentiùs expositæ sensibus (nam obiter illorum nihil moror sententiam, qui æqualitatis, similitudinis, & ejusmodi relationum ingenitas nobis à natura species arbitrantur; quando commentum illud, ut jam antea vidimus, haud sit necessarium, & minus idoneum scientiis, nec ulla, quod ego perciam, præter Metaphysicas quasdam vocabulorum perplexitates & argutiolas, solidâ ratione subnixum, res, inquam, immediatiùs objectæ sensibus) è qualibus constant primæ indemonstrabiles hypotheses non opus est, ut aliis, præter vulgò recepta sua nomina, verbis explicentur, quoniam eadem omnino cunctis hominibus sui ipsarum distinctas ideas ingerunt insculpúntque. At ex primisistis inter se comparatis, vel utcunque resultantes alios conceptus secundarios, quo præcidatur omnis occasio discrepandi, ex scientiarum usu videtur, primas istas è quibus oriuntur hypotheses allegando, quàm accuratè determinare. Rigidéque rem taxando, in scientia qualibet è primis fundamentis extruenda, ferè nullum adhibere licet vocabulum non antea definitum, aut saltem cui respondentem in natura rem non possimus exerto

di-

digito commonſtrare. Quod eò magis in hoc, quod præ manibus habemus, magnitudinis ſymptomate debet obtinere, quoniam præcipuas fert partes, & ferè ſemper intervenit in omni materia, diſcurſúque Mathematico, adeóque multum referat ut unam omnes harum ſcientiarum ſtudioſi conſonam & communem ejus ideam, claram, diſtinctam, rationi conſentaneam habeant, nec ut eam confusè vel diſcorditer apprehendant. Quinimo quòd jam quid ſit æqualitas, in quo conſiſtat ejus formalis ratio, quomodo definiri debeat, ipſi jam quærimus & diſceptamus, argumento ſit illam definiri debere. Addo, quòd mihi ſaltem incumbat hoc ſuſtinere, quoniam axiomata cuncta pro theorematis habeo, quæ poſſunt, & debent, ſi res exigat, demonſtrari; ídque præſertim ex definitionibus terminorum, e quibus conſtant; unde quo veritas conſtet illorum axiomatum: quæ eidem æqualia ſunt; ſi æqualibus æqualia ſubtrahantur aut apponantur; & conſimilium, innoteſcere debet, & in promptu haberi æqualitatis definitio. Addo propter hujuſce definitionis defectum fieri poſſe, quinimo fortaſſe de facto contigiſſe (nonnullum in hujuſce ſcientiæ dedecus & detrimentum) ut in maximè tranquilla atque pacifica Geometriæ provincia contentiones & turbæ viguerint, incaluerint iræ, clamores & convitia ſtrepuerint. Undenam enim quæ Clavium inter & Peletarium, nec non inter alios Geometriæ ſtudioſos atque peritos, de angulo contingentiæ, infenſis animis, & verbis contumeliæ non expertibus, agitata lis exerſit, niſi quòd æqualitatis

& anguli definitiones non ritè fuerint constitutæ; nec vocabulorum istorum ambiguitas penitùs est sublata; fixas istas una fortè vel altera commoda definitio facilè sedâsset, decidisset, sustulisset. Expedit igitur definitionem aliquam æqualitatis præterni. Hoc teneatur imprimis. Porro, Secundò, quoniam, ut antehac sæpe dixjmus, & nobis habemus persuasissimum, unaquæque definitio peti debet ex aliqua suppositione possibili per experientiam manifestè compertam; & cùm si agnatas huic negotio quàm attentè perlustremus & excutiamus universas, nulla se præbitura sit opinor hâc possibili magnitudinum congruentiâ commodior æqualitatis definitioni fundandæ hypothesis: ergò hanc amplecti decet & agnoscere. Quòd nulla commodior objiciat se, compluribus attendenti liquebit indiciis. Nam nulla frequentiùs observatur, & sensibus exponitur, oculis conspicitur, manibus attrectatur; nulla clariùs intelligitur, aut possibilior existimatur. Et quum de rerum æqualitate (vel inæqualitate) vertitur quæstio, semper ei dijudicandæ lici ad congruentiam accurritur & appellatur. Id quod signum sit satis evidens hanc æqualitatis notionem communibus hominum conceptibus aprimè consentire; quódque nil aliud intelligunt homines, quum duas magnitudines æquari dicunt, quàm eas sibimet applicatas inter se congruere, vel ejusdem saltem spatii capacitatem adimplere. Quod & adhuc experimento mihi bene familiari dabo confirmatum. Sæpe rogatus sum à Geometriæ non admodum assuetis quid sibi velit, aut

quid

quid significet illud de circuli tetragonismo famigeratum problema. Respondere mihi fuit in promptu, figuram inquiri planam rectilineam quadrilateram rectangulam æquilateram, cujus area vel spatium lineari perimetro inclusum, proposito circulo (hoc est, areæ planæ circulari peripheriâ circumscriptæ) sit acuratissimè æqualis. At quid, instare solebant, per æqualitatem illam intelligis? Quomodo enim spatium cirulare rotundum angulari spatio possit æquari; cùm illa congruere nequeant, & sibimet adaptari? Cui dubitationi (satis equidem subindicanti hominum plerosque nil aliud per æqualitatem quàm ipsissimam magnitudinum congruentiam intelligere vel denotare) tum demum facilè satis iri factum comperio, si dicam modò reperta dicta figura quadrilatera quasi cerea foret (hoc est, è materia molli penitúsque flexili constaret) partium quarundum inflectione, transpositione, vel compressione quomodocunque circularem in figuram transformetur, circulóque tunc apposita congruat exactè, figuras istas æquales evadere, peractúmque fore quem tanto studio indagamus tetragonismum. Huic responso suam ad præconceptam notionē de industria accommodato continenter acquiescunt; unde satis liqueat homines per æqualitatem nil aliud intelligere vel significare, præter possibilem congruentiam. Accedat huc tertiò quæstionis hujus ut mihi videtur peremptorium argumentum, ex eo symptomate, cui innituntur, à quo deducuntur, ad quod ultimò referuntur omnia circa magnitudinum æqualitatem theoremata (à quo proinde re-

liqua magnitudinum æqualium ceu talium affectiones derivantur) ex ejuſmodi dico ſymptomate commodiſſimè definitur æqualitas. Atqui congruentiæ innituntur, ab ea deducuntur, per eam demonſtrantur (immediatè ſcilicet aut mediatè) in eam demum ultimò reſolvuntur omnia circa magnitudinum æqualitatem demonſtrata. Per eam igitur commodiſſimè definiatur æqualitas. Majoris in iſthoc ſyllogiſmo propoſitionis veritas e definitionis natura ſatis eluceſcit; cujus officium eſt ut ſymptoma quoddam primarium exhibeat, ex qua, tanquam formali cauſa, reliquæ definiti paſſiones per legitimum diſcurſum inferantur. Igitur ſi magnitudines æquales definiantur, quæ ſibimet invicem præcisè congruere poſſunt, & ex hoc expreſſo ſymptomate magnitudinum æqualium quà talium affectiones demonſtrari poſſunt, ſatis conſtabit indè definitionem iſtam eſſe legitimam. Atqui res iſto modo ſe habet, & minor æquè vera eſt. Nam de facto quicquid in Elementis (adeóque quicquid uſpiam alibi in Mathematicis) circa rerum æqualitatem demonſtratur, ab iſto axiomate, Quæ congruunt ſunt æqualia, dependet, ut aliquatenus hujus lectionis initio commonſtratum eſt, & poſthac fortaſſe clariùs oſtendemus. Quod axioma proinde qui pro æqualitatis definitione poſitum accipiunt, rectiſſimè facere videntur, quibus (præter memoratos Apollonium & Hobbium) doctiſſimum accenſere potero Borellium; *Nam*, inquit is, *ſi nomen æqualitatis non eſſet adhuc impoſitum, dici poſſet, Quæ ſibi mutuò congruunt vocentur æqualia, & hæc eſſet definitio, non pronunciatum;*

Euclid. Reſtit. p. 16.

nunciatum; non igitur aliter differre putat hoc pronunciatum ab æqualitatis definitione quam efferendi modo; & posse concedit ipsum in definitionem facile transmutari. Quod innuit verò propter nomen æqualitatis prius impositum, & vulgo receptum id axiomatis potiùs quàm definitionis vicem subire, non in eo viro doctissimo prorsus assentio. Nam etsi rerum quarumvis, trianguli videlicet aut circuli, recepta nomina sint, & communiter usurpata, tamen expedit ista nomina definiri, ad excludendos nempe confusos de rebus illis & vocabulis conceptus. Vulgus enim, ut in diverbio fertur, non distinguit, & idæas sæpius fovet, nominibus usitatis respondentes admodum confusas & inadæquatas; scientiarum verò genius & ratio distinctos admodum & adæquatos conceptus postulant; adeóque vel receptissima nomina rerum, (sensibus præcipuè non obversantium, & sui clarissimas idæas non imprimentium) scientiarum magistri definire debent, & vocabulorum significatus à vulgari confusione compurgare. Quanquam nec aliter receptum est æqualitatis nomen, quàm ut designet id, quod dicto pronunciato exprimitur, magnitudines nempe quæ dicuntur æquales, inter se congruere. Continet igitur illud axioma definitionem æqualitatis, etiam vulgaribus idæis bene consentaneam. His adjiciatur quartò, quòd nullam adversarii magis idoneam comminisci possint æqualitatis notionem, neque per eam, hâc exclusâ ratione quid velint aut distincte intelligant, commode queant interpretari. Argumento sint quas Hobbio suggerit antago-

nista suus alias duas ejus descriptiones, ut ipse credit, magis appositas illâ, quæ ex congruentia desumitur. Hobbium hisce totidem verbis scitatur; *Annon simul & semel dixisse posses, id alteri æquale est quod tantundem est atque ipsum: vel æqualia sunt quorum eadem est quantitas; vel si neutra horum placeat, saltem aliam definitionem invenisse?* Ad quæ verba licet advertere primò, quod verisimile sit acutissimum illum virum nullam excogitare potuisse definitionem accuratiorem illis, quas adducit, duabus (nec enim siquæ succurrissent, illas omisisset); atqui hæ duæ, vel nihil omnino significare videntur. Aut in congruentiam recidere. Illam imprimis (quæ ab Aristotele mutuò videri potest accepta, cujus est ἴσα ὧν τὸ ποσὸν ἕν) æqualia sunt, quorum eadem est quantitas non improbo, sed pronè amplector, si per eam saltem denotetur non actualis sed possibilis identitas quantitatis (ut sanè debet intelligi, nè manifestæ falsitatis convincatur ipsa enunciatio tribuens eandem rebus æqualibus, hoc est, rebus actu diversis, quantitatem). Sic, inquam, intellectam definitionem istam non reprehendo, sed interrogo quomodo possit eadem evadere duarum rerum quantitas aliter quàm per congruentiam; nisi per applicationem, aio, vel mentalem penetrationem; aut ejusdem medii spatii interventu coincidant, & quasi coadunentur sibimet invicem, aliquo modo superiùs exposito; aliter, inquam, quomodo possint duarum rerum à se revera distinctarum identificari quantitates, vix equidem video vel capio. Quod alteram verò spectat definitionem, id al-

Met. IV. 16

alteri æquale est, quod tantundem est atque ipsum, ei primò legem oppono Dialecticam ab Aristotele summa cum ratione præscriptam; Ἀεὶ ὁ ὅρος ἀποδίδοται τοῦ γνωρίζειν χάριν τὸ λεχθὲν· γνωρίζομεν δὲ οὐκ ἐκ τῶν τυχόντων, ἀλλ' ἐκ τῶν πρότερον, καὶ γνωριμοτέρων. Φανερὸν (οὖν) ὅτι ὁ μὴ διὰ τοιούτων ὁριζόμενος, οὐχ ὥρισται· (hoc est, *Cùm definitio tradatur rei declarandæ causâ, declaremus autem non ex quibusvis (temerè arreptis) sed ex prioribus & manifestioribus; unde constat illum, qui non à talibus definit, haud quaquam definire*). Hanc, inquam, justissimam legem objicio citatæ definitioni, quis enim non æquâ saltem facilitate concipiat quid sit æquale alteri, ac quid sit tantundem atq; ipsum? At verò penitius attendenti vocabulum tantundem nil fortè comperietur aliud designare quàm tantum idem, vel idem in quantitate, vel cujus eadem est quantitas; adeóque hæc descriptio nullatenus à præcedente distabit, & pariter relabetur in nostram congruentiæ hypothesin, si rectè percipiatur & enucleetur; adeò nostram sententiam adversarii, nec opinantes, dum evertere student, coguntur stabilire, suóque satis ipsorum indicio produsit se vix, ut maximè velint, à nostro conceptu revera dissidere. Prætereo denique quod Euclides æquales magnitudines expressè perhibeatur definivisse, quæ replent eundem locum; in libello de gravi & levi, mihi nunquam viso, sed quem auctor mihi Ramus est alicubi prostare. Cæterum major huic causæ (major, inquam, naturæ cum congruentiæ tum æqualitatis) lux affulgebit, ex illorum, quæ tum à Proclo, tum à dicto eruditissimo viro

Topic. VI. 4.

Schol. Mathem. VII. p. 163.

vire producuntur in contrariam partem, argumentorum, equidem haud difficeor satis in speciem validorum, discussione; à qua tamen omnino, ne prolixior sim, in præsens abstinebo.

LECT. IV.

EMagnitudinum communioribus affectionibus & symptomatis observationi subjectis, & Mathematicas ingredientibus hypotheses, novissimè se tractandam exhibuit congruentia, quâ suppositâ resultare, & ab ea commode definiri magnitudinum æqualitatem in præcedenti quadantenus astruximus lectione. Quam tamen doctrinam acriter & animose, invictis ut ipsi putant argumentis, impetunt Proclus, & Hobbii præclarus antagonistes in Elencho suo Geometriæ Hobbianæ. Sed an penitus debellatum sit, & opinioni suæ parem, hoc est integram, ipsi victoriam reportârint, supereſt jam & nobis incumbit, objectorum efficaciam ad rationis trutinam exigendo pensitare. Id quod eo promptiùs aggredimur pertentare, quòniam ex hoc adversantium sententiarum atque discursuum conflictu non exiguâ rebus istis lux. Neutiquam aspernandæ quædam veritatis scintillæ extundi posse videantur; nec tamen omnibus extricandis captiunculis anxiè desudabo, sed quæ candide accepta rem propius attingere, vis aliquid in se momentique gravioris continere, videntur argumenta

gumenta curatiùs excutiam; memor divini quod apud Aristotelem habetur præcepti; (Ἅμα δὲ καὶ μᾶλλον ἂν εἴη πιστὰ τὰ μέλλοντα λεχθήσεσθαι προακηκοόσι τὰ τῶν ἀμφισβητούντων λόγων δικαιώματα· τὸ γὰρ ἐρήμην καταδικάζεσθαι δοκεῖν ἧττον ἂν ἡμῖν ὑπάρχοι· καὶ γὰρ δεῖ διαιτητὰς, ἀλλ' οὐκ ἀντιδίκους εἶναι τοὺς μέλλοντας τἀληθὲς κρίνειν ἱκανῶς). Proponam igitur argumenta, non illa quidem delumbata, sed quoad potero nervosiùs astricta. Primò debet, obtendunt, æqualitatis eadem univoca ratio communis, & notio generalis assignari, pro rebus iis universis, quibus vere tribuitur, & justè convenit æqualitas. Atqui non solis magnitudinibus (quibus nimirum peculiaris est ista, pro qua nos certamus, congruentia) sed quantis etiam omnibus homogeneis, aptisque natis inter se comparari (puta motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus, numeris) æquo jure, pari ratione, simili loquendi proprietate tribui solet, & verè convenit æqualitas, etsi nulla ratione quadret aut congruat eis ἐφάρμοσις· (Τὸ γὰρ ἴσον καὶ ἄνισον, καὶ τὸ ὅλον καὶ τὸ μέρος, καὶ τὸ μεῖζον, καὶ τὸ ἔλαττον κοινὰ, καὶ τῶν διηρημένων ἐστὶ ποσῶν καὶ τῶν συνεχῶν· i.e. communiter omnibus quantis continuis atque discretis convenit æqualitas, ait Proclus. Et alter adversarius; *Annon eadem est æqualitatis notio in his omnibus, imò & in rebus aliis omnibus, quotquot æqualitatis aut inæqualitatis sunt capaces?* Quo facit quòd quam circa æqualitatem versantur axiomata, Geometricis elementis præstrata, quantis indifferenter omnibus accommodari solent, & jure possunt, unde vocantur ἀξιώματα κοινὰ. Οὐ μόνον λέ-

De Cælo I, 10.

Elench. p. 10.

λέγεται μεγέθεσιν ἀληθεύειν τούτων ἕκαστον, ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῖς, καὶ κινήσεσι, καὶ χρόνοις; iterum ait Proclus. Eique suffragium fert ipse
Met. XI. 4. Philosophus; Ὅτι γὰρ (inquit, exemplum afferens principii communis) ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων ἴσα τὰ λειπόμενα, κοινὸν μὲν ἐστι πάντων τῶν ποσῶν). Igitur à congruentia (solis quippe magnitudinibus propriâ, nec aliis quantis competente, adeóque neutiquam æqualitati coextensâ, sed multò strictioribus cancellis coarctatâ) perperam desumi asseritur æqualitatis ratio. Debet enim ex Logicæ justissimo præscripto, definita res attributo suo, per quod definitur, exactissimè coæquari; cum ea reciprocari & converti. Huic exceptioni primariæ, satis ut non nemini videatur presse nos urgenti, repono summatim primò, quòd hic sola magnitudinum æqualitas propriè atque præcipuè definitur. Secundò, quòd non injuriâ nec abs ratione sola definiatur. Tertiò, quòd hæc definitio (è congruentia dico petita definitio) suo modo, quantùmque satis est, omnibus quantis adaptari possit. Denique quartò, quòd expediat, saltem liceat, majoris perspicuitatis atque securitatis causâ, ut reliquorum quantorum æqualitates seorsim definiantur. Quibus distinctiùs expositis, & sufficienter apud æquos rerum arbitros approbatis, satis opinor factum erit allatæ objectioni. Quod primum punctum attinet, in eo nulla versatur controversia; nam solas magnitudines congruentiæ præsertim capaces esse non diffitentur adversarii, quin obtendunt potiùs, & in eo collocant vim argumenti sui; satisque liquet ex se, cùm locum

cum implere, spatium occupare, contingere se mutuò, sibimet applicari, se quodammodo penetrare, magnitudinibus proprium & peculiare sit attributum. Ergò solis illis hæc definitio, siquidem definitio, propriè competit & quadrat. Verùm secundò, non iniquè dico magnitudinum æqualitatem per se solam propriè definiri. Nam cum illis primariò & propriè conveniant quantitas & quantitatem consequentes, vel concomitantes affectiones (extensio, terminatio, compositio, divisio, mensuratio, reliquæque) quidni primariò conveniat illis æqualitas, & proinde ex respectu ad ipsas propriè definiatur? Docet nos Philosophus generis definitionem præcipuæ speciei τῶν πρὸς ἕν, primùm & propriè convenire, reliquis secundariò, consequenter & per similitudinem; Τὸ τί ἐστιν ὑπάρχει πᾶσιν, ἀλλ' οὐκ ὁμοίως, ἀλλὰ τῷ μὲν πρώτως, τῷ δ' ἑπομένως. (*Ratio rei convenit omnibus, at non eodem pacto, sed huic primò, illis consecutivè*) καὶ ὁ ἁπλῶς ὁρισμὸς τῶν ἄλλων ὁμοίως ἐστὶ, πλὴν ὁ πρώτως. Simpliciter accepta definitio τῷ πρώτῳ δυστικῷ propriè convenit; ergò respectu ejus definitio condi debet. Annon autem alia quanta quævis ex respectu ad magnitudines tanta quanta sunt nedum æstimantur & dignoscuntur, sed etiam dicuntur atque denominantur? Ipsa vocabula majoris & minoris, totius & partis, finiti & infiniti, continui, discreti, extensi, contracti, symmetri, asymmetri, reliquaque talia, quæ toties aliis ascribuntur quantis, num aliunde quàm à magnitudinibus originem tràhunt, & ab iis ad alia secundariò transferuntur? Nec id con-

Met. VII. 1.

contingenter aut immeritò, ſed neceſſitate quadam & ſumma cum ratione. Nam gradus certè quoſdam, τάσεις & ἀνέσεις, intenſiones & remiſſiones ſuas habent aliæ res, ex accidente Mathematicæ conſiderationi ſubjectæ, atquæ nullo modo comprehendere vel exprimere poſſumus, niſi per magnitudinum aliquarum (quibus inſunt, in quas agunt, quas producunt, circa quas quomodocunque verſantur) inſtitutam collationem, & adhibendo vocabula mutuatitia de magnitudinum attributis tranſducta. Ut intelligamus, quomodo pondus aliquod aut momentum rei gravitantis concipiatur, aut quare dicatur tantum, ita magnum aut parvum, niſi quatenus inest tanto corpori, vel quod tantum corpus attollere, tantam magnitudinem valet ſuſtinere? Quomodo diviſibile, vel totum intelligatur, niſi corpus cui inhæret, aut quod reſpicit partes habeat ſingulas ejuſmodi virtute præditas, illive potentiæ reſpondentes? Unde finiti titulum adipiſcitur, niſi vel ex terminis illi ſubſtratæ magnitudinis, aut ſaltem ex finibus illius eatenus extenſi corporis, quod evehere poteſt aut ſuſtentare? Commenſurabile pariter & incommenſurabile prædicetur ex eo, quod aut ſubjectum ſuum aut objectum, ſymmetriâ vel aſymmetriâ verſus alias quibuſcum comparatur magnitudines, itidem pondere ſimiliter donatas, affecta comperiuntur. Sic & motus ex ſpatii quod permeatur magnitudine tantus (longus, brevis; magnus, parvus; ſeu abſolutè ſeu comparatè) è ſpatii limitibus eouſque protenſus, ibíque terminatus, ex ejus dimenſionibus menſurabilis; ex

ejus

ejus compositione totus, è divisibilitate partibilis habetur & dicitur. Haud absimiliter (nam exempla nonnunquam undicunque conquisita coacervo (plura certè quàm quæ dilucidandæ rei propositæ requisita censeam ipse) libenter & datâ operâ consulens harum rerum minùs assuetarum utilitati, ut nempe γεῦμα quoddam præparatorium universæ Matheseôs obiter & sensim instillem ipsis, ac profuturos aliquando conceptus aliud agens insinuem) haud, inquam, aliter tempus ex spatii ab aliquo determinato mobili, Sole nempe vel Lunâ, peragrati magnitudine concipitur & appellatur; neque non terminos, extensionem, symmetriam, aliásque suas passiones ex illo, quem ad ejusdem magnitudinem obtinet, respectu mutuatur. Velocitas etiam ex spatii percursi magnitudine (non quidem absolutâ, sed comparatâ cum magnitudine spatii ab alio determinato mobili, Sole videlicet aut Lunâ transacti, hoc est, ex magnitudine spatii tanto tempore peracti) taxatur; paridíque ex relatione ad spatii magnitudinem limitari, componi, dividi, ad mensuram exigi; quomodocunque comparari solet, neque vix aliter potest æstimari. Numeri rerò quòd non alia ratione quàm ut symbola magnitudines designantia quantitatis participes sunt & proportionis, abundè jam antehac dictum & ostensum est nobis. Nec omnino solus, & authoritatis omnimodæ suffragio destitutus hæc affirmo (quamvis non raro quas pertractandas suscipio quæstiones, & materias distinctè quod sciam explicuerit nemo, solámque quod ille dixit Libera pervacuum vestigia ponere —

nullo

nullo fere viæ duce reconditæ, qui molesti per hasce salebras itineris tædium consoletur, quò magis condemnandum sit, si nonnunquam cessitare videar, aut impeditius procedere; ac) saltem in hac re principem habere videor astipulantem & præeuntem mihi Philosophum, cujus hæc imprimis alicubi leguntur verba, nostram in rem satis luculenta; Ἔστιν δὲ τὸ μανθάνειν κινεῖσθαι τῷ ἅμα μεταβάλλειν καὶ μανθάνειν τὸ μανθάνειν ἀνάγκη· διὸ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον ἐν τῷ χρόνῳ ἀνάγκη ὑπάρχειν· ἐν γὰρ τῷ χρόνῳ τοῦτο πάσχειν ἢ ποιεῖν ἢ ὅλως κινεῖσθαι ἐστίν· ἐν τῷ δὲ χρόνῳ ἐστὶ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον· ἐν τούτοις γὰρ ἐστὶ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τῇ θέσει. Ἔστιν δ' ἐν τῷ μεγέθει ἐστὶ τὸ πρότερον καὶ τὸ ὕστερον· ἀνάγκη γὰρ ἐν κινουμένῳ εἶναι τὸ πρότερον καὶ τὸ ὕστερον ἀπὸλλογον τοῖς ἐκεῖ· ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ τοῦ χρόνου ἐστὶ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον διὰ τὸ ἀκολουθεῖν ἀεὶ θατέρῳ θάτερον αὐτῶν. hoc est, explanatius aliquanto; *Cum, quicquid movetur ab alio termino ad alium terminum properet, & omnis magnitudo continua sit, magnitudinem eatenus consequitur motus. Ob magnitudinis quippe continuitatem continuus est motus, & propter motum tempus quoque continuum est. Quamvis enim extiterit motus, nullum quoque tempus percipimus videtur assumpsisse. Prius autem & posterius spatio primitus insunt, ex diversa partium ejus positione: cuique magnitudini inest quantum eundo, cuivis quoque necessariò inerit, analogicè respondens illi. Quinetiam in tempore reperiuntur prius & posterius, quia semper eorum alterum alteri consequens est* (quoad hujusmodi nempe passiones & attributa). Ita satis clarè motus ac temporis continuitatem

simul

Phys. IV. 26.

simul & quantitatem magnitudinis ὁμωνόμων statuit consectarias & derivatas. Idem rursus alibi: Ἀκολουθεῖ τῷ μεγέθει ἡ κίνησις, τῇ δὲ κινήσει ὁ χρόνος τῷ καὶ ποσὰ καὶ συνεχῆ καὶ διαιρετὰ εἶναι· διὰ μὲν γὰρ τὸ μέγεθος εἶναι τοιοῦτον, ἡ κίνησις ταῦτα πέπονθε· διὰ δὲ τὴν κίνησιν ὁ χρόνος· hoc est, *Magnitudinem sectatur motus, motus verò tempus, quatenus hæc quanta sunt, & continua, & divisibilia. Quia nam magnitudo talis est, ideo taliter affectus est motus, & propter motum tempus.* Ita Philosophus in Physicis, ut vix potuerit ad rem nostram magis appositè, vel pleniùs & liquidiùs pronunciâsse; nisi fortè quæ tradit in Metaphysicis etiam his expressiora sint, ac magis nostram corroberent, illustréntque sententiam. Nam de motu & tempore ita proloquitur; Καὶ γὰρ ταῦτα ποσὰ ἄττα λέγεται, καὶ συνεχῆ τῷ ἐκεῖνα διαιρετὰ εἶναι, ὧν ἐστι ταῦτα πάθη· λέγω δὲ οὐ τὸ κινούμενον, ἀλλ' ᾧ ἐκινήθη· τῷ γὰρ ποσὸν εἶναι ἐκεῖνο, καὶ ἡ κινήσις ποσὴ, ὁ δὲ χρόνος τῷ ταύτην· hoc est, *Motus & tempus aliquo modo quanta dicuntur & continua, propterea quòd illa, quorum affectiones sunt (vel quibus accidunt) divisionis sunt capacia. Intelligo autem pro subjecto ipsorum non ipsum mobile, sed juxta quod movetur (hoc est, spatium transactum) non eò quòd illud est quantum, etiam motus est quantus, & propter hoc tempus.* Ita nobis suffragium suum & patrocinium præstat Philosophus. Æquum igitur est, quum alia quanta suam magnitudini quantitatem (ejus saltem notitiam & comprehensionem) ac quantitati connexas affectiones referant acceptas, ut eorundem etiam æqualitas (hoc est, quantitatis velut identitas & coalitio)

Phys. IV. 18.

Met. IV. 13.

ex magnitudinis æqualitate censeatur; utque per analogiam & secundariò quanta sunt, sic analogicam & tralatitiam quoque fortiantur æqualitatem. Id quod à veritate non abludere rem ipsam immediatiùs & intimiùs exploranti, communémque sensum & consensum hominum consulenti manifestiùs apparebit. Nam v.g. si quem mortalium (seu Philosophum, seu è vulgo quempiam) scisciteretur aliquis quid intelligat, quùm dicit æquari duo tempora, nihil hæsitans, opinor, statim respondebit, intelligere se duo æqualia spatia ab eodem uniformiter lato mobili (saltem à diversis æquâ velocitate latis) peragi; Solem nempe suæ diurnæ vel annuæ revolutionis æquales partes absolvisse. Si quid significet per duorum ponderum æqualitatem; quòd extrema, dicet, vis hujus magnitudinem aliquam elevare vel sustinere queat æqualem (ejusdem speciei) magnitudini, quam extrema vis alterius elevare poterit aut sustinere; nec aliter de motuum ac velocitatum, & aliorum, quæcunque sunt, quantorum æqualitate consulti statuent, aliquam semper magnitudinem quarundam æqualitatem allegando, cujus respectu dicta quanta constituantur ac denominantur æqualia. Scilicet à magnitudinis æqualitate reliquorum æqualitatem vix mente quisquam secernere potest, aut penitus abstrahere; vix illâ seclusâ quod sint æqualia deprehendere vel agnoscere; quomodo sint æqualia mente cogitare, vel verbis exprimere; quid ipsa denuò sit æqualitas distinctè concipere valent. Illam igitur cùm alia quævis æqualitas intimè connoter & involvat ut naturâ pri-

priorem & sibi præstratam, constitutivam, & definitivam sui; non igitur nisi minus principaliter & secundariò, dependenter & consecutivè, derivativè & per participationem, κατ' ἰσότητα aut καθ' ἀναλογίαν, æqualia sunt alia quanta. Unde quò de reliquorum æqualitate clarior apprehensio sit, & certius fiat judicium, magnitudinum æqualitas quid significet, in quo consistat, præcognosci, distinctéque comprehendi, adeóque jure meritò per se priùs definiri debet. Id quod secundò suscepimus explicandum & ostendendum. Verùm porrò, tertiò, quantis etiam aliis quibuscunque quodammodo convenit ἐφαρμογὴ nostra, prout inquam (uti jam ante satis declaratum) aliquo modo terminantur, extenduntur, componuntur, dividuntur, mensurantur, alias magnitudinum affectiones admittunt, suo modo, sic & aliquo modo congruentiam vendicant sibi (mediante præsertim magnitudinum quibus insunt, quas respiciunt congruentiâ) concipiatur enim, exempli causâ, duabus in rectis lineis, vel in duabus æqualium circulorum peripheriis æquâ velocitate deferri mobilia duo puncta (vel alia quævis æqualia & similia duo mobilia) intelligatur etiam lineas illas aut peripherias, utique congruentiæ capaces, sibimet applicari, sic ut dicta quoque puncta vel mobilia sibimet apponantur, adeóque sibi congruunt tum ab initio, tum in progressu sui motûs (quod eveniet ob suppositam motûs æqualem celeritatem) inde congruentibus perpetuò mobilibus, & ipsorum orbitis coincidentibus, haud difficile concipitur ipsos motus ἐφαρμόζειν, uniri, coalescere, adeóque

eandem quantitatem habere, seu sibimet adæquari. Item si in curriculo corporis alicujus (puta Solis aut Terræ) cujus æquabili motu determinatur temporis quantitas, adsumpta concipiantur duo puncta ceu termini, de quibus motuum, adeóque tempore, decurrentium initia computentur, istique termini sibi concipiantur adponi, sic ut exinde (modo mox expositio) duo motus ab iis auspicantes congruant invicem, etiam ipsa tempora simul confluent, & in unum commigrabunt. Neque si confingatur animo duorum annorum initia conjungi, difficile sit ut pariti tenore procedentes illi simul exiliant, se quasi penetrent, in unum coëant imaginari. Quod perinde est ac si diceres, duo æqualia tempora si simul incepissent, una desiissent. Quinimo qua ratione tempus tempori quodammodo congruum revera sit, hinc quoque licebit judicare. Cùm tempus ejusdem nobilissimi constantissimique mobilis æquabili circulari motu sæpiùs iterato mensuretur & determinetur optimè (sicuti notat Aristoteles; Ἡ κυκλοφορία (inquit) ἡ ὁμαλὴ μέτρον μάλιστα, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τούτου γνωριμώτατος) circulus autem iste, periodico mobilis ejusdem recursu toties emensus, semper unus idemque persistat, hinc illo conciliante mediantéque, motus & tempus (nec non motuum temporumque partes ab eodem istius peripheriæ puncto capientes exordium, & in idem punctum desinentes) velut uniuntur & identificantur inter se, adeóque congruunt perfectissimè. Quamobrem annus in se verti, redire menses, instaurari secula, lapsas tempestatum vices atque perio-

Phys. IV. 20.

dos

dos restitui, eosdem denique temporum circuitus iteratò obiri mense censetur, & sermone teritur vulgi (καὶ γὰρ ὁ χρόνος αὐτὸς εἶναι δοκεῖ κύκλός τις, *Tempus ipsum videtur esse cyclus quis* (aut circulus) ob motum quo determinatur, circularem sæpiùs repetitum, & in se quasi replicatum, inquit Philosophus: idémque rursus in hanc mentem; Ὡς ἐνδέκετο κίνησιν εἶναι τὴν αὐτὴν, καὶ μίαν πάλιν καὶ πάλιν, οὕτω καὶ χρόνον ἐνδέκεται, οἷον ἐνιαυτὸν, ἢ ἔαρ, ἢ μετόπωρον. Ast opportunum non est de tempore plura nunc effundere. Velocitatum par est ratio, quæ mediantibus itidem spatiorum simul decursorum congruentiis ipsæ sibi congruant, & consequenter æquales ostendantur. Quinetiam si duo corpora gravia ejusdem speciei, puta duæ sphæræ æquales aqueæ vel aereæ, per mentalem istam antehac expositam penetrationem congruere supponantur, eâdem opera gravitates seu ponderositates, ipsarum coincident & congruant, eâque ratione deprehendentur æquales. Quin & ipsis rationibus, seu proportionibus æqualibus, aliquo modo tribuatur congruentia, quatenus omnes coincidunt & identificantur uni cuidam in numeris, lineis, aut aliis quantis expositæ (quæ quidem exposita ratio spatii quoddam instar habet, (respectu infinitarum quas repræsentet & exprimat rationum, illas omnes quasi recipiens in se, & inter se coadunans). Numeri verò quatenus æquales, eatenus & congruentes esse possunt, per congruentiam scilicet ipsorum quantorum æqualium quæ repræsentant ac denominant. Adeò cujusque generis quanta sicut alias magnitudinum

Phys. IV. 18.

proprietates, ita congruentiam recipiunt suo modo, hoc est, analogicè, consecutivè, participativè, propter magnitudinum, à quibus determinatur eorum quantitas, congruentiam; & consequenter æqualitatis à congruentiæ suppositione resultans definitio, ne quidem illis omnino disconvenit, imò revera tantùm illis, quantùm æqualitas ipsa competit & assignatur meritò. Sed ad quartum responsi caput promoveo pedem; Quòd expediat aut ad minimum liceat aliorum quantorum æqualitates seorsim definiri vel explicari; ex æqualitate scilicet respectiva magnitudinum, quibus insunt, aut circa quas modo quovis occupantur. Nam (ut priùs insinuatum) eorum quæ sunt & dicuntur πρὸς ἕν, id ratio communis exigere videtur, ut quæ primaria sunt in suo genere, adeóque quasi mensuræ reliquorum definiantur imprimis per se, cum alia consequenter ex relatione, quàm ad ista priora sortiuntur, peculiari declarentur. Ita nos iterum docet horum callentissimus & perspicacissimus Philosophus; Met. III. 2. Ὥστε δοκλόμενον inquit, πωσαχῶς λέγεται ἕκαστον οὕτως ἐνποδοτέον πρὸς τὸ πρῶτον ἐν ἑκάστῃ κατηγορίᾳ, κοῖς πρὸς ἐκεῖνο λέγεται· τὰ μὲν γὰρ τῷ ἔχειν ἐχεῖνα, τὰ δὲ τῷ ποιεῖν, τὰ δὲ κατ' ἄλλους λεχθήσεται τοιούτους τρόπους· hoc est, eorum quæ inæqualiter attribuuntur aut prædicantur (seu τῶν πρὸς ἕν) distinguendum est imprimis quotupliciter singula dicuntur, tum explicandum est quo pacto referantur ad id quod in dicto genere (vel prædicamento) primum est; quædam enim quòd habeant ipsum, quædam quòd efficiant, quædam secundùm alios hujusmodi modos attribuentur),

tur). Ita cùm æqualitas pluribus conveniat, magnitudini quidem originaliter & præcipuè, reliquis quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, potentiis motricibus) minùs principaliter & secundariò; primùm illius quæ magnitudinibus convenit æqualitatis constituenda ratio est, tum explicandum quomodo reliquorum quantorum æqualitates an ipsam referuntur; eóque fit ut separatim definiuntur. Et velocitates quidem, e. g. æquales, ex Aristotelis mente definiantur, à quibus eodem tempore (vel æqualibus temporibus) eadem vel æqualia spatia transmittantur (Ὠκυτὴς, inquit, τὸ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἴσον κινούμενον. Et, Τὰ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὸ αὐτὸ μέγεθος κινούμενα ἰσοτάχη. Ecce ut æquè velocium definitionem ingrediatur μέγεθος, utque non illicitum nec ἀπροσδιόνυσον censuerit Philosophus, velocitatis æqualitatem definire) pariter æqualia tempora definiantur, in quibus æquabili motu latum corpus aliquod notabile (tempori determinando scilicet assumptum, Sol puta vel Luna) æquales peragit sui curriculi partes; & ἰσόχρονα vocentur, quæ coexistunt istis æqualium spatiorum confectionibus. Similiter æqualia pondera dicantur (absolutè loquor, & sepositò ad Mechanicas applicationes eorundem gravium momenta variantes respectu) respectu subjecti, quæ magnitudinibus specie iisdem, & quantitate æqualibus insunt; respectu objecti, vires motrices æqualium (similiter positarum & quoad omnes conditiones partium) magnitudinum; vel quæ possunt eadem, aut æquales ejusdem speciei magnitudines sublevare: & ἰσοβαρῆ,

quæ viribus ac potentiis prædita sunt æqualibus. (Quidam apud Aristotelem veteres Philosophi, ex subjacente materia definiebant ἰσοβαρῆ, τὰ ἐξ ἴσων συγκείμενα τῷ πρώτων, vel τὰ ἐξ ἴσων συνεστῶτα· quæ ex æqualibus principiis, aut æqualibus materiæ particulis constant). Æquales denique numeri definiri possent, quæ repræsentant magnitudines eodem modo divisas (vel accuratiùs aliquovis simili modo). Hisce consimilibúsque pactis nil obstat, quin definiantur omnium quantorum æqualitates, imò multùm fortè proderit hoc ipsarum distinctæ comprehensioni. Neque desunt exempla præstantissimorum authorum, qui nedum hujusmodi quandam præ se ferentium homonymiam, at majoris perspicuitatis causâ quorundam etiam συνωνύμως dictorum quantorum æqualitates separatim definire non dubitarint. Nam Euclides elemento undecimo, solidas definivit æquales figuras, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur. Et magnus Apollonius (initio sexti Conicorum libri, nuper ex Arabico in Latinum sermonem transfusi, & à præstantiss. Borello luce donati) æquales definivit coni-sectiones, quæ ad invicem sibi mutuò superpositæ congruunt. Ut reticeam Euclidem (id quod innui jam antehac) in libello de gravi & levi, æqualia magnitudine definivisse (formaliter & expresè juxta nos) quæ replent eundem locum. Nec fere dubito quin gravium æqualium aliqua isthic extet definitio, cui præluserit hæc de magnis æqualibus. Quinimo, quod affine est nostro negotio, Euclides partis definitionem tradidit aliam atque aliam,

De cælo IV. 2.

de

de magnitudinibus & numeris. Idémque quinto in elemento, ex uſu putavit magnitudinum analogiam ſeorſim definire (ἐν τῷ ἑνὶ λόγῳ μεγεθῶν λέγει) numerorúmque proportionalitatem aliter in elemento ſeptimo definire; unde neceſſitatem impoſuiſſe ſibi videtur, ſiquando de quantis aliis inſtituiſſet dicere, ipſorum quoque proportionalitatem ſingillatim definire, vel illam ſaltem de magnitudinum proportonalitate traditam iis accommodare. Quare ſi peccatum eſt (quod pertendunt adverſarii) nomen idem, quatenus diverſis genere vel ſpecie rebus attribuitur, aliter ac aliter definire, ejus admiſſi reos allegemus, quibuſcum errare non admodum pudeat nos, auctores perquam nobiles & eximios. Tandem (ut hujus objectionis examini coronidem imponamus) plurimum haud diffiteor adducta valeret ratio, ſi poſſit alia quæpiam bene commoda generalior æqualitatis notio aſſignari. Sed nulla ſuccurrit alia, ſaltem hâc potior, hypotheſi cuivis ad ſenſûs obſervationem, vel ad mentis captum evidentiùs exploratæ ſubnixa. Tentavit quidem (ut adnotavimus in Lectione præcedente) duas memoratus egregius vir, nec alias, opinor, meliores potuit comminiſci, quæ tamen, ut oſtendimus, in noſtram hanc penitius excuſſæ recidunt, quódque non aliter vel eædem, vel tantæ eædem concipiantur eſſe diverſarum rerum quantitates, quàm per congruentiam aliqualem, ſeu propriam ſeu analogicam. Nam ut hoc unum adjiciam, nonnihil elucidandis & confirmandis tunc dictis; quantitatis identitas ſpecifica minimè ſufficit æqualitati con-

constituendæ (tunc enim omnes circuli, cunctæ sphæræ, quælibet figuræ similes æquarentur sibi mutuò) sed ad hoc identitas quædam numerica postulatur; non illa quidem actualis, at saltem possibilis, qualis optimè (nec aliter opinor) per illam quæ ex congruentia emergit, quantorum coincidentiam & coalitionem exhibetur. Hæc igitur notio, cum magnitudinibus (hoc est, propriè & primariò quantis) eximiè quadret; & aliis quantis aliquo modo; cumque alia quanta per magnitudinis æqualitatem definiri possint & debeant; & quando non alia possit excogitari convenientior; his, inquam, expensis hæc non gravatim admittenda videtur & approbanda, nequicquam obstante propositio contrario discursu. Hoc igitur argumento præcipuo, maximam verisimilitudinis speciem præ se ferente defuncti, alterum huic succenturiatis aggrediamur, ut adversarii confidunt, haud minùs Achilleum & invictum, sed ut mihi videtur, enervius & pusillius multo. Ejusdem (inquiunt) loci possessio vel repletio æqualitati extranea & accidentaria est; nec minùs æquales sunt magnitudines, etsi non possideant eundem locum, quàm si maximè possideant. Et figuræ dissimiles eundem locum occupare nequeunt, nisi partium situs transmutetur. *Quid autem* (aiunt) *motus, & locus, & transmutatio ad æqualitatem spectant? Pyramis enim, etiam dum manet pyramis, non minùs est æqualis (ut ut non similis) quàm ubi transformatur; atque dum alibi manet æqualis est (ut ut non ibidem) non minùs quàm ubi in eundem locum movetur. Ergò non magis ex respectu*

ad

ad locum (adſumptâ partium quum opus eſt tranſpoſitione) *debet æqualitas definiri, quòd homo ex eo quòd poſſit eſſe princeps Tranſylvaniæ* (ſic enim argumentum ſuum etiam ſale condiunt, nè fortè putreſcat, aut minùs ſapiat). Verùm reſpondeo reſpectum ad ſpatium ab ipſo occupabile non eſſe magnitudini cuivis accidentarium aut extrinſecum, ſed ei neceſſario, intiméque connexum; ſicut actui cuivis convenit intrinſeca ſibi connata χόησις ad potentiam, cui reſpondet, quam complet. Non magis, inquam, magnitudinis naturæ convenit eſſentialiter, ut terminetur, extendatur, componi poſſit aut dividi, vel ut alio quovis attributo gaudeat, quàm ut tantam talémque ſui capacitatem (tantum & tale ſpatium) adimpleat. Ex hujuſque ſuppoſitionis fonte multæ Mathematicis neceſſariæ hypotheſes promanant, ut ex antehac oſtenſis ſatis pateat. Porrò, etſi magnitudinibus, ceu talibus, non obtingat neceſſario, definitum ut locum aut ſitum, hunc vel illum, poſſideant; tamen illis ut æqualibus neceſſariò convenit, ut eandem aliquo modo quantitatem habere poſſint, & proinde ut locum eundem inſidere poſſint, tum quoniam ex eo quòd eandem actu quantitatem habent, planè conſequetur ipſas de facto ſpatium idem occupare; tum quia nullo alio modo concipi poteſt identitas iſta poſſibilis. Ad hæc, quòd non contingenter æqualibus accidat magnis hæc ejuſdem ſpatii poſſidendi capacitas, ex eo clariſſimè liquet, quòd rem ſeriò perpendenti nil aliud de quibuſvis magnitudinibus inter ſe quoad æqualitatem, aut quamvis proportionem, collatis demonſtrant

strant Geometræ, quàm illas congruere, vel eundem locum occupare posse: quum, inquam, Euclides triplum conum æqualem ostendit cylindro; cùm Archimedes superficiem sphæræ quadruplo maximo ejusdem sphæræ circulo demonstrat adæquari, cùmq; circulum æquiparari docet suo ipsius radio ducto in semiperipheriam, eò res recidit (ipsam scilicet altiùs è primis principiis repetenti) & nihil evincunt aliud ipsorum ratiocinia, quàm istas tales magnitudines sibi congruentes esse posse. Siquidem ipsorum demonstrationes pendent è primis elementis, nominatim ex quarta & octava primi elementi, ubi demonstratur triangulorum æqualitas, ex eo quòd possint congruere. Ergò si posse locum eundem occupare sit quid accidentarium magnitudinibus illis, nihil necessarium demonstrârunt Geometriæ principes; id quod horridule sonat auribus Mathematicis. Præterea, occupatio loci non magis est aliena, non minùs est intrinsecè conjuncta cum magnitudine, quàm motus, seu mutatio loci; utque magnitudines ubicunque positæ concipiuntur æquales, ita figuræ utcunque quiescentes ac innotæ, suam eandem naturam obtinent atque servant. Nihilominus omnes Geometræ non dubitant figuras quasvis à motu quocunque, quo nimirum facilè possint progenerari, definire. Ut Euclides sphæram ex revolutione semicirculi circa diametrum, cylindrum ex parallelogrammi circa latus, conum ex trianguli circa crus rotatu; Apollonius universè conicam superficiem ex rectæ lineæ circularem peripheriam circumeuntis transitu; Archimedes

medes conoidæa ac ſphæroidæa ex conicarum ſectionum portionibus planis circa diametrum volutatis: & nemo non Geometrarum ſimili modo magnitudines quaſlibet (lineas, ſuperficies, ſolida) è motibus circularibus, rectis, parallelis, mixtis utcunque pro ſuo arbitratu fas eſſe ducit definire. Quæ quidem definitiones nedum legitimæ, ſed omnium optimæ ſunt: nec enim ſolummodo definitæ magnitudinis naturam explicant, ſed poſſibilem ejus exiſtentiam commonſtrant, conſtructioniſq; modum evidenter indigitant, non modò qualis ſit deſcribunt, at quòd talis eſſe poſſit experimento probant, & quo pacto talis evaſerit, extra dubitationis aleam conſtituunt. Et par eſt ratio, ſimilis virtus hujus noſtræ ex congruentia deſumptæ definitionis; non enim ſolùm exponit quod ſit æqualitas magnitudinum, at quòd æquales dari poſſint, indicat luculentè quâ ratione fiant, dignoſcantur, explorentur æquales magnitudines edocet manifeſtè modo ſcilicet qui frequentiſſimo paſſim in uſu eſt, & nuſquam non æqualitati diſcernendæ dijudicandæque ſolet adhiberi. Itaque nemini diſplicere debet hæc definitio, cui definitionum indoles perſpecta eſt, & quomodo ſemper ex aliquâ poſſibili ſuppoſitione reſultent ipſæ, probè ac prudenter animadvertit. Superſunt multa, quæ cogitatam attingere, ſed levioris momenti, quorumque facilè poſſit è dictis & inſinuatis ſolutio perſpici deducíque; ut & à vobis ſupplerí poſſunt, quæ congruentiam & æqualitatem ſpectant reliqua. Et alioquin me, pariter ac vos, impensè tædet hujus in re tenui je-

jejunáque tam enormiter profusæ disputationis. Neque nonne fas esset à tanto sublimioribus, quæ vos monent, ratiociniis detinere. Igitur, optimi Auditores, jam valete. Proximâ Lectione me conferam aliò; & magnitudinum præcipua symptomata proportionem ac analegiam ad partes vocabo.

LECT. V.

EX Magnitudinum attributis & symptomatis, quæ Mathematicis subjacent hypothesibus, ultimum tractavi congruentiam; & ex ea rectissimè desumi notionem æqualitatis effusè dissertavi. Res jam poscere videtur ut aliò transeam; verùm quæ mea est infelicitas, materiam istam dimittere nequeo, priusquam è dictis consectariam unam aut alteram annotatiunculam, ad ulteriorem propositi declarationem ac usum spectantes, adjunxero. E traditis igitur ac disputatis
1. deteganus imprimis notabilis error Procli, & plerorumque, qui post eum in octavum elementi primi pronunciatum commentati sunt, interpretum. Axioma sic exprimitur; Quæ sibi mutuò congruant, ea inter se sunt æqualia: hoc negat Proclus universaliter conversum valere; (Τὰ (inquit, hoc est, æquales magnitudines congruere) οὐκ ἐπὶ πάντων ἀληθὲς, ἀλλ' ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν μόνων· *Non omnibus verè convenit, at solis ejusdem speciei, vel perfectissimè similibus magnitudinibus.* Eique postremo succinens Borellus; *Conversum ve-*

ro

vò (ait) *quòd scilicet ea quæ æqualia sunt, invicem sibi congruant, non in omnibus verum est, sed in iis quæ specie similia sunt, ut lineæ rectæ inter se, & circumferentiæ æqualium circulorum, ut Proclus animadvertit.* Verùm hæc exceptio diligentiùs inspecta, nedum non est necessaria, sed (id quod mirum videatur tot perspicaces viros effugisse) planè falsa comperietur. Nam per congruentiam intelligunt ibihic vel actualem aut potentialem congruentiam. Utrolibet accipiatur modo, veritati discrepabunt ab iis enunciata. Si de actuali capiunt, evidentissimæ falsitatis convincuntur, ex eo quòd non omnes æquales rectæ, nec æqualium circulorum peripheriæ, nec æquales utcunque magnitudines vel simillimæ, actu congruant, at loco sæpè disjunctissimæ sint; quantum scilicet ab Arctico circulo distat circulus Antarcticus ei, situ contrarius, ac specie perfimilis, & magnitudine prorsus æqualis: si de potentiali, patet ex ostensis & non ostendendis etiam falso affirmari, quòd æquales aliquæ magnitudines non congruant. Nam contrà verissimum est, omnia magna æqualia, quantumvis specie diversa, vel dissimilia sibi posse congruere. Verum quidem est ejusdem speciei magnitudines, & sibi perfectissimè similes (ut nempe rectas lineas, æquali radio descriptos circulos, æquales angulos rectilineos) peculiari quodam modo, retento nempe partium ordine, situque neutiquam variato congruentiam actualem admittere; facilius etiam ipsarum possibilis congruentia deprehenditur, & ex ipsarum forsan definitione statim infertur; at non minùs hoc verè convenit

venit omnibus aliis æqualibus magnis, quæ partibus ſuis quibuſdam tranſlocatis, & figurâ ſuâ nonnihil immutatâ poſſunt quam accuratiſſimè fieri congruentes; hoc eſt, unius partes (quæ à toto non differunt) alterius ſpatium exactè poſſidebunt. Figuræ vero retentio nihil adjicit, ut nec ejus alteratio derogat æqualitati vel congruentiæ magnitudinum; nec omnino facit πρὸς τὰ ἄλογα ejus hîc conſideratio; ut neque poſſibilis congruentiæ facilis vel difficilis comprehenſio: nam æque verum eſt, quod per mille diſcurſuum ambages legitimè demonſtratur, ac quod intuitu primo perſpicitur, aut unico conſeſtim elicitur ſyllogiſmo. Euclides ſanè datæ rectilineæ figuræ cujuſvis, cum aliquo determinato quadrato, cujuſvis ſolidæ figuræ planis ſuperficiebus contentæ cum aliquo certo cubo congruentiam demonſtravit (aut, quatenus hoc poſtremum fieri potuit, attentavit) id eſt, ipſas dimetiendi modum edocuit aut inveſtigavit: Archimedes ultrà progreſſus circulos & ſectores circulares, nec non ſuperficies curvas, conicas, cylindricas ſphæricas comparavit, & alias cum aliis congruere, per clariſſimas conſequentias demonſtravit. Cùm, inquam, e.g. demonſtravit Archimedes circulum æquari rectangulo triangulo, cujus baſis radio circuli, cathetus peripheriæ exæquetur (vel quod eodem recidet, quadrato cujus latus eſt media proportionalis inter radium & ſemiperipheriam circuli) nil ille, ſiquis propius attendat, aliud quicquam quam aream circuli ceu polygoni regularis indefinitè multa latera habentis, in tot dividi poſſe minutiſſima triangula,

quæ

quæ totidem exiliſſimis dicti trianguli trigonis æquentur; eorum verò triangulorum æqualitas è ſola congruentia demonſtratur in elementis. Unde conſequenter Archimedes circuli cum triangulo (ſibi quantumvis diſſimili) congruentiam demonſtravit. Item cùm ab eodem conica ſuperficies æqualis oſtenditur areæ circuli, cujus radius proportione medius eſt inter coni latus & ſemidiametrum baſis, nil oſtendit aliud (ut planè liquebit ad primam demonſtrationis originem recurrenti) quàm ſuperficiem iſtam velut ex infinitis exiguis triangulis conſiſtere, quæ ſingula congruunt tot ſingulis triangulis dictum circulum componentibus. Ita congruentiæ nihil obſtat figurarum diſſimilitudo; verùm ſeu ſimiles ſive diſſimiles ſint, modò æquales, ſemper poterunt, ſemper poſſe debebunt congruere. Igitur octavum axioma vel nullo modo converſum valet, aut univerſaliter converti poteſt; nullo modo, ſi quæ iſthic habetur congruentia deſignet actualem congruentiam; univerſim, ſi de potentiali tantùm accipiatur; quaſi diceretur, Quæ congruere poſſunt, æqualia ſunt; & converſè. Quo pacto potior ratio ſuadet ut intelligatur. Etenim præſtat utiliſſimum illud pronunciatum ſic exponi, ut valeat omnimodè converſum, quàm ut nullatenus converti queat; útque magnitudinis eſſentialem paſſionem contineat, quàm ut accidentarium ſolummodo ſymptoma reſpiciat. Nam actu congruere nihil ad magnitudinis aut æqualitatis naturam pertinet, at ipſis contingenter accidit; nec ob aliam cauſam adhibetur, quàm ut ab ea ſeu manifeſto indicio (quippe cùm

actus ſemper antegreſſam arguat potentiam) congruentia potentialis innoteſcat, quæ nempe ſola cum æqualitate cohæret intimè, cúmque ea perpetuò reciprocatur. Sicut enim magnitudini non actu dividi, ſed eſſe diviſibilem connatum cenſetur, & arctiſſimè connexum; iſta verò diviſibilitas ex actuali (utcunque fortuitâ vel arbitrariâ) diviſione dignoſcitur ac arguitur; ita quantis æqualibus, ut talibus, accidentaliter obvenit, ut congruant actu, convenit autem inſeparabiliter & perpetuò ut poſſint congruere; huic autem commonſtrandæ potentiæ deſerviat actus iſte, propterea que ſolet adhiberi. Igitur perperam Proclus, & alii plerique Procli veſtigiis inſiſtentes, explicant hoc axioma, non ſatis animadverſo, quod actualem inter & poſſibilem congruentiam verſatur, diſcrimine, ſolámque quæ minùs hîc attendenda fuerat reſpicientes actualem congruentiam. Unus ab hac erroris contagione ſe conſervavit immunem optimus Clavius; quem immeritò propterea reprehendit doctiſſimus ejus ὁμώφυλος Tacquetus; *Non rectè Clavius* (inquit) *hoc axioma convertit; falſum eſt enim ea quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt ſibi mutuò congruere, diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent, quòd ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit converſa.* Ego verò potiùs Clavii ſingularem aut prudentiam aut εὐτυχίαν demiror, qui communiter arreptum errorem feliciter evitavit, iſtámque falſo fundamento ſubnixam exceptionem prorſus omiſit, veréque licèt haud plenè, ſatíſque luculentè pronunciatum illud expoſuit. Sed in hoc nimius
2. fui, quamvis nonnulla ſubticeo, Noto ſecundò,

cundò, quòd ex æqualitatis hac præstrata definitione, quæ æqualitatem spectant, axiomata possunt demonstrari. Id quod ejus arguit convenientiam atque præstantiam. Debent enim axiomata (sicut admonitum est sæpiùs) ut theoremata quædam è ritè constitutis terminorum, quibus constant, definitionibus demonstrari posse. Solem igitur istum, quem appellavit Ramus, in Mathematicis clarissimum, Quæ eidem æquantur, sibimet æquantur mutuò, sic petitâ hinc demonstratione illustravit Apollonius: Sint duæ magnitudines A,C, utraque singillatim æqualis alteri tertiæ B. Dico magnitudines A,C sibimet æquari. Nam quoniam ex hypothesi æquantur magnitudines A,B, ipsæ (æqualitatis definitione præmissa) congruere vel occupare poterunt eundem locum. Occupent igitur locum Z. Item quoniam C æquabilis ponitur ipsi B occupanti locum Z, etiam C; ex æqualitatis definitione poterit locum Z occupare. Ergò utraque A & C poterit locum Z occupare. Unde reciprocè ex æqualitati definitione A & C æquales erunt, Q,E,D. Huic autem definitioni objicit Proclus, quòd innitatur assumptis duobus hujusmodi pronunciatis, Quæ possident eundem locum sunt æqualia; quæ eundem cum altero locum occupant, locum ipsa possident eundem; quorum utrumque propositâ conclusione demonstrandâ longè asserit obscurius & concessu difficilius; Ταῦτα (dicit) ὅτι πολλῷ ἀσαφέστερα τοῦ προθέντος ἀξιώματος ἐναργὲς· Et nihilo mitiùs, Οὐκ ἔστι παντελῶς ἐν προσδεκτέον τὸ μεταβαίνειν ἐπὶ τὸ τόπον, ὅς ἐστιν ἀγνωστότερος

ἡμίν τ ἐν τόπῳ ὄντων. Sed in magni Geometræ defensionem breviter respondeo: Primò, liquidò falsum esse, quòd loci seu spatii, quàm æqualitatis consideratio sit obscurior, & ignotior nobis. Cùm ex antehac ostensis, æqualitas non aliter quàm ex ea possit elucidari. Congruentia quoque, vel ejusdem loci possessio supponi potest, ex eo quòd à sensu possibilis discernatur; ast æqualitas immediatè sensum non incurrit, at ex aliqua comparatione suppositâ resultat; itaque clarior est congruentiæ notio quàm æqualitatis. Et cùm quæ eundem locum occupant æquantur, sit commodissima definitio æqualitatis (utì sufficienter astruxisse videmur) erit illa simplicior ac evidentior aliâ quâvis æqualitatem includente propositione. Sicut definitio trianguli simplicior est & clarior quovis circa triangulum theoremate. Secundò, quod alterum attinet pronunciatum, Quæ eundem cum altero locum occupant, eundem & ipsa locum possident; nego quicquam illo clarius esse posse, nedum ut hoc obscurius sit propositâ conclusione. Est enim ad fundum explorata, propositio prorsus identica, nec specie differens ab hac, Petrus est Petrus; ad hanc enim reducitur ejus sensum nihil immutando, tantùm verò perspicuitatis gratiâ nomina magnitudinibus imponendo, Z locus communis ipsorum B, A, est idem cum Z locco communi ipsarum B, C. Aut ista Categorica, Quæ eundem cum altero locum occupant, locum ipsa possident eundem, redigi possit in hanc συνάμμενον enunciationem hypotheticam, Si A occupet Z locum ipsius B, & C locum Z ipsius B occupet,

tum

tum A & C occupabunt locum eundem Z. Ubi repetitur in consequente, quod in antecedente ponebatur. Quænam igitur, obsecro, poterit hâc esse manifestiùs vera propositio? non illa certè, Quæ eidem æqualia: quum æqualitas quid sit, quid distinctè significet antea præcognosci debet, quàm ejus propositionis veritas queat comprehendi. Sed adhuc tertiò, hoc modò dictum nugax & futile pronunciatum demonstrationi nostræ præsterni, vel in ea adhiberi nego. Nos tantùm ex eo quòd magnitudo supponatur occupare locum Z, inferimus ei parem C posse locum istum Z occupare: id quod immediatè consectatur ex æqualitatis præmissa definitione. Nec aliud ab eo principium adhibemus. Attendat quilibet: Nequicquam igitur siculneis telis Proclus Apollonii demonstrationem impugnat; quòd verò graviter concludit, Πάντα ἀξιώματα ὡς ἄμεσα καὶ αὐτοφανῆ παραδοτέον γνώριμα ἀφ' ἑαυτῶν ὄντα καὶ πιστά. Ὁ γὰρ τοῖς φανερωτάτοις ἀποδείξιν προσάγων, ὁ βεβαιοῖ τὴν περὶ αὐτῶν ἀλήθειαν, ἀλλ' ἐλαττοῖ τὴν ἐνέργειαν (ἐνάργειαν lege potiùs) ᾗ ἔχομεν ἐν τοῖς ἀδιδάκτοις προλήψει· (hoc est, *Omnia axiomata, velut immediata, suâque luce clara tradi debent, à seipsis manifesta fidemque promerentia. Nam qui rebus evidentissimis demonstrationem applicat, non ipsarum constabilit veritatem, sed evidentiam imminuit, quam in præconceptis absque doctrina notitiis possidemus.*) Cui sententiæ, quòd ad vulgarem praxin attinet, ipse lubens subscribo, nec opus esse fateor, ut tam facilem assensum impetrantes notitiæ scrupulosiùs examinentur. At quo demonstrati-

onis ingenium, ſcientiæ natura, principiorum differentia, magis declarentur; quòd extremus rigor etiam axiomatum exigat probationem, quòd ea revera poſſint demonſtrari, quòd definitiones bene conſtitutæ ſint, iiſque demonſtrandis inſerviant, non inutile cenſeo prolatis nonnunquam experimentis edocere. Neque qui proinde vel hiſce de cauſis, vel ingenium exercitandi gratiâ tale quid attentaverit, furoris illum aut faſtûs meritò putem arceſſendum, quorum tamen eapropter Apollonium ipſum, immenſæ ſubtilitatis, & conſummatiſſimæ in Mathematicis eruditionis virum, inſimulare, non dubitat è recentioribus nonnemo ſeverior Ariſtarchus, utinam ipſe vitiis iiſdem non propior. Utcunque tanti viri fretus exemplo non verebor ipſe, duo quæ dicto primo proximè ſuccedunt axiomata protinus è dictis oſtendere. Secundum axioma taliter ſe habet; Si æqualibus æqualia adjiciantur, compoſita (vel tota) ſunt æqualia. Quod ita demonſtro: Sint æquales duæ magnitudines A,B; quæ propterea ex æqualitatis definitione congruere poterunt, & eundem locum occupare. Occupent igitur locum X; adjiciatur ipſi A magnitudo C, cujus locus ſit Y. Ergò compoſitæ A+C locus eſt X+Y. Adjiciatur etiam ipſi B magnitudo D æqualis adjectæ priori C; unde itidem ex æqualitatis definitione D poterit occupare locum X; adeóque B+D occupare poterit locum compoſitum X+Y; eundem nempe quem A+C potuit occupare. Ergò ex æqualitatis definitione B+D æquabitur ipſi A+C. Q.E.D. Simili diſcurſu demonſtretur axioma proximè

mè ſubſequens; Si ab æqualibus auferantur æqualia, reſidua erunt æqualia. Sint enim rurſus æquales duæ magnitudines A, B; quarum proinde communis eſſe poterit locus X. His auferantur æquales C, D, quarum etiam communis eſto locus Y. Ergò reſiduus locus X—Y communis eſſe poterit locus utrique reſiduæ magnitudini A—C & B—D. Ergò reſiduæ A—C & B—D æquantur. Quod E.D. Nec diſſimili ratione quævis ad abſtractam æqualitatem pertinentia theoremata (vel axiomata) dictæ definitionis ſubſidio demonſtrentur, quod ejus oſtendit præſtantiam atque commoditatem. Sed hanc obſervationem miſſam faciens ſubnoto tertiò, Quòd ex dictis facilè perſpiciatur quid ſit inæquale, quid majus, quid minus altero. Horum nempe quidvis vix ex reſpectu ad oppoſitum æquale, vel immediatiùs ex relatione ad ſpatium utcunque poterit explicari. Reſpiciendo ſpatium ad inæquale dicetur, quod alteri ſemper & neceſſariò diſcongruens erit, hoc eſt, quod alteri quomodocunque applicatum (ſeu ſimul, ſeu ſucceſſivè, ſeu per mentalem penetrationem, ſeu retento partium ſitu, ſeu ipſarum ordine perturbato, quolibet ex modis ſuperiùs expoſitis) nullo pacto coincidet exactè, ſed aut excedet ipſum, vel ab eo deficiet. Conſequenter ex duabus inæqualis ſpeciebus, id Majus erit, quod alteri ſic appoſitum vel applicatum, excedet ipſum, hoc eſt, totum alterius ſpatium occupabit, & aliquid inſuper ulterioris ſpatii; vel cujus pars alteri toti congruet, ſeu totum alterius ſpatium replebit; Minus, quod alteri appoſitum defi-

ciet ab ipso, vel alterius parti coincidet; non nisi partem occupabit spatii, quod ab altero possidetur. Habito autem ad æquale respectu, dicetur inæquale, quod alterum vel alteri æquale continet in se, & aliquid insuper, vel continetur in altero (vel in aliquo quod alteri æquatur) sic ut aliquid præterea superstet. Majus nempe, quod continet alterum, aut alteri æquale, nec non aliud præterea: Minus, quod continetur in altero, vel in eo quod æquatur alteri, sic ut adhuc superstet aliquid in altero. Vel cum D. Hobbio, non inconcinnè definiatur Major magnitudo magnitudine (corpus corpore dicit ille, sed universaliùs efferri præstat) quando pars illius huic toti æqualis est: Minor autem, quando illa tota parti hujus æquatur; quanquam forsan in hisce definitionibus nonnihil desideretur. Nam objici potest, quòd non respondent eis magnitudinibus inæqualibus, quarum una comprehendit alteram. Quod facilè tamen excusetur aut condonetur, quoniam omnis magnitudo sibi perfectissimo modo censeatur æqualis; & æqualitatem eminenter continet identitas, id quod passim in demonstrationibus Geometricis supponitur. Vel corrigantur, & suppleantur definitiones istæ, hoc modo ipsas enunciando: Magnitudo magnitudine major est, quando pars illius huic toti æqualis est, aut eadem; Minor verò, quando illa tota hujus parti æqualis est, aut eadem. Quæ definitiones (aut descriptiones) inæqualis, majoris, minoris, aliis quoque quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus, numeris) analogicè suóque modo quadrabunt, sicut de æqua-

æqualitate prolixiùs eſt declaratum. Unicum admonebo de inæqualitate dicta ſic accipienda eſſe, ſemper ut exceſſus & defectus, id quod abundat aut ſubeſt, penes aliquod homogeneum intelligatur. Nam omnino diverſi generis quanta quoad æqualitatem & inæqualitatem nequeunt inter ſe comparari. Quæ de proportione poſtmodum acturis diſtinctiùs explicanda venient. Ego verò nunquámne me tricis iſtis & leptologiis expediam? Semper in everrendis quiſquiliis tempus prodigam? In tam opima meſſe, tam ubere vindemia, tanta graviſſimarum diſquiſitionum copia, quid ſparſas hinc inde ſpicas lego, neglectos racemos inquiro, dilapſa grana, deciduas uvas colligo? Cùm grandium & arduarum rerum in Mathematicis tam varia, tam jucunda, tam certa ſuppetat venatio, quare leviculas ego minutulaſque quæſtiones, ceu muſcas, ſtylo proſequor & confodio? Solennia ſcilicet devito, ſeriò nugor, graviter ineptio, minima quæque ſtudioſè conquirens, faſtidioſè repetens & inculcans. Adeóne perpetim tot longinqua diverticula, tot devias ambages conſectabor, & in tritos regiæ λεωφόρους calles nunquam remeabo? Num in hoc generalium materiarum atrio ſubdiali conſeneſcam, in ſcientiarum veſtibulo diverſabor æternùm, hærebo ſemper in limine, Mathematum oſtia tantùm pulſabo, nec in ipſorum unquam intimas ædes, in adyta ſanctiora penetrabo? Præludam ſemper, & eminus velitabo, nunquam cominus aggrediar, manum conſeram, ſtato prælio decernam? Quid quòd in illa, quæ nil niſi clarum & evidens, certum & exploratum,

ploratum, pacatum & ſerenum pollicetur atque jactat ſcientia, dubitationum nebulas offundo, lites & bella ſero, turbas ac tempeſtates excito; diſceptando denique liberiùs, & ad ſcrutinium pleraque revocando, Mathematum certitudini & evidentiæ (quæ à rixis tantopere & à tumultibus abhorrent) detrahere videor & derogare. Ita mihi ſoleo, forſan & alii (ſaltem haud ſine cauſa vel ſpecie juſta poſſint) exprobare. Neque tamen nihil eſt, quod criminationibus iſtis diluendis, excuſandóque mihi contrà poſſim obtendere; cúmque tantum inſperato nunc effluxerit huic Lectioni deſtinati temporis, ut novam aliam materiam jam non invitus adoriri nequeam, indulgete precor (auditores humaniſſimi) veniæ pauxillum & patientiæ veſtræ noſtras has affanias aliquatenus propugnanti, conſiliíque quod hactenus iniverim mei ratiunculas exponenti. Quòd iſtas rerum & quæſtionum minutias attinet repono, non ſemper eſſe parva quæ talia videntur; cùm ſtellæ perquam exiles, & Sol non ita magnus appareat; unde veniat igitur, & quorſum tendat aſpectatæ rei ſpecies, antequam ejus dijudicetur magnitudo, pernoſcendum eſſe. Tum quæ mole parva ſunt, vi nonnunquam eximiâ donari; quæque nihil in ſe notabile continent, permagnas ſubinde poſt ſe trahere conſequentias. Maximarum rerum origines ferè ſemper parvas exiſtere; parvis è ſeminibus ingentiſſimas ſtirpes excreſcere, parvis è fontibus immenſos fluvios intumeſcere, veritatis & erroris præcipuè feracem eſſe naturam, è paucis veri ſcintillis vaſtam undiquaque lucem

cem diffundi, è minima falsitatis radice copiosam errorum segetem pullulare; in scientiis præsertim, è tenuibus filis maxima rerum momenta suspendi, nec sine maximi dispendii periculo minima contemni: sicut unâ rotulâ transpositâ tota perit machina, vel ad usum inepta redditur, venulâque subinde disruptâ vel magnus perimitur elephantus; ita nonnunquam unica, quæ gracilis videri possit & sterilis, notio malè posita, perperam intellecta, vastam confusionem, spissam caliginem, multiplicem errandi causam, ex fœcundâ consequentiarum propagine, in quamvis derivet scientiā. Prudenter hoc (ipse quoq; suæ acribologiæ, strictæque quibusdam in minutioribus diligentiæ patrocinans) observavit Aristoteles, verbis animadversione dignissimis, quæ extant in De Cœlo I. 5. Καὶ τὸ μικρὸν (inquit) παραβῶσαι τῆς ἀληθείας ἀφισταμένοις γίνεται πόῤῥω μυριαπλάσιον· οἷον εἴτις ἐλάχιστον εἶναί τι φαίνη μέγεθος· οὗτος γὰρ τοὐλάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστ' ἂν κινήσειε τῶν Μαθηματικῶν· τούτου δ' αἴτιον, ὅτι ἡ ἀρχὴ δυνάμει μεῖζον ἢ μεγέθει· διόπερ τὸ ἐν ἀρχῇ μικρὸν, ἐν τῇ τελευτῇ γίνεται παμμέγεθες· hoc est Latine, *Modica quæpiam aberratio recedentibus à veritate, statim immane quantum adaugetur & multiplicatur. Ut si quis magnitudinem affirmet minimam dari; is certè minimum inducens, maxima subvertet Mathematicorum decreta. Id autem exinde provenit, quod principium omne potestate sua, quàm absoluta magnitudine prævalentius est. Unde quod initio videtur exiguum, progressu tandem permagnum evadit.* Adeó periculosum est Philosophi judicio minimorum curam posthabere, quibus non

non tantùm ſua gratia, ſed & ineſt non rarò ſua quædam utilitas non aſpernenda; his præſertim in ſcientiis, quæ ex humilibus, & penè ridiculis initiis, ad incredibilem inopinatò amplitudinem & excelſitatem enituntur. Non itaque mihi graviùs ſuccenſendum eſt, ſi videar nonnunquam haud præcipui ponderis rebus quàm par eſt curioſiùs attendere, prolixiùs immorari; quando nempe res ſuadet, ut putem ex iis bene perceptis etiam gravioris momenti rebus aliquid lucis accedere. Quod autem ad illas, quas non infrequenter moveo controverſias, ex iis nemo ſuſpicetur Mathematicarum quicquam ſcientiarum certitudini decedere; nam circa res illæ verſantur à Mathematum fundamentis admodum remotas. Vix extimam Geometriæ cutem ſtringunt hæ quæſtiones, nedum ut ejus intima viſcera pertingant. Non ejus principia quatiunt hi arietes, non ratiocinia diruunt, aut omnino ſolicitant. Dum in ejus confiniis atque ſuburbiis contentiones oriuntur & pugnæ, clamores & jurgia perſtrepunt; intra muros, in ipſa acropoli alta pax, profundum habitat ſilentium; nihil iſthic auditur ἀμφισβήτησον aut ἀντίῤῥησον. Exempla deſumamus licet cùm aliunde, tum ex nuperrimis quas agitavimus controverſiis. Diſceptatum eſt quæ ſit æqualitatis genuina notio, unde commodiſſimè definiatur; an demonſtrari poſſint, quæ circa illam aſſumuntur axiomata: at num vera ſint iſta axiomata, nemo diſputat aut dubitat; & proinde nemo collectis eorum ſubſidio concluſionibus diſſentiet aut repugnabit. De principiorum natura & numero, déque

déque modo ipſorum notitiam conſequendi (num innata ſint, aut aliunde comparata, num ex inductione generali, vel ex obſervatione tantùm ſingulari dependeat) diſquiritur & diſputatur; attamen ut ſarta tecta permaneat, extra dubitationis aleam collocetur ipſorum veritas. Ambigitur & controvertitur an Euclides paralleliſmum commodè definierit ex negatione concurſûs rectarum infinitè protractarum; at tales dari rectas, quæ ſic nunquam conveniant, quæque non ineptè nominentur parallelæ, hactenus opinor inficiatus eſt nemo. An idem rectè principii loco ſumpſerit duas rectas, quæ cum inſiſtente recta faciant internos ad eaſdem partes angulos minores duobus rectis, ab iſta parte ſibimet occurſuras, ita negetur à quibuſdam, ut tamen ipſius propoſitionis veritas à nemine vocetur in dubium. Et num Euclides iſtam proportionalium affectionem bene ſelegerit, à qua definivit ipſa (cum bona Proſodiæ venia liceat παρωδεῖν) Geometræ *certant, & adhuc ſub judice lis eſt*, ſalvâ tamen cui nemo ſapiens non aſtipulatur iſtius propoſitionis, ſub theorematis forma traditæ, veritate. Complura proferre poſſem exempla, quibus conſtet quas Mathematici verſant lites Mathematum certitudini vel evidentiæ nihil officere, ſed ipſam potiùs inconcuſſam veritatem, intemeratam claritatem arguere, quas nulli diſputationum tumultus dimoveant, nullæ diſcordiarum nubes obtenebrent. Neque mirandum hoc, quum non de præcipuarum rerum veritate, ſed de quarundam propoſitionum ordine; non de ſcientiæ certitudine, ſed de

ſciendi

sciendi methodo modóque, de quibusdam tantùm exterioribus litigetur Philosophicis potiùs quàm Mathematicis; quæ quidem non parùm interfit scire, quæque distinctam, plenam, & accuratam ad comprehensionem rerum in Mathematicis pertractatarum nonnihil conducant, at cum Geometriæ principiis comparata (principiis istis, quorum dum incolumis persistit veritas, nullum Mathesi gravius incommodum accedere poterit, nulla Geometrica conclusio ruet) cum his, inquam, collata, parva vel nulla reputari possint ista, de quibus digladiamur; adeo verum est & hîc,

——*Minimas rerum discordia vexat,*
Pacem summa tenent——

Nec igitur mihi magnopere vitio vertenda est pugnacitas ista, seu proclivitas ad disputandum de rebus ad hasce scientias spectantibus, cùm nihil id noceat ipsarum firmitati, sed ad ἀκρίβειαν aliquid conferat. Præsertim cùm ipse nil agam aliud, eò conatum omnem dirigam, ut disputando radices evellam, causas amoveam disputandi, rerum quoad potero rationes experientiæ trutinam exponendo, à Metaphysicis argutiis ad communem sensum omnia redigendo; nec pleraſque quæstiones ipse cudo, sed alicubi (quanquam ut plurimùm leviùs discussas) reperio, sententiam meam argumentis quibusdam communitam interponens, vestróque decisionem ultimam arbitrio committens. Necnon regulam istam Aristotelis æquissimam, religiosè colens & observans, superiùs (si bene commemini) allegatam, sæpiùs repeti dignam: Μᾶλλον ἂν εἴη πιστὰ τὰ μέλλοντα

De Cœlo *l.* 10. λεγ-

λεχθήσεσθαι προακηκοόσι τὰ τῶν ἀμφισβητούντων λόγων δικαιώματα· τὸ γὰρ ἐρήμην καταδικάζεσθαι δοκεῖν, ἧττον ἂν ἡμῖν ὑπάρχοι. Καὶ γὰρ δεῖ διαιτητὰς, ἀλλ' οὐκ ἀντιδίκους εἶναι τοὺς μέλλοντας τ' ἀληθὲς κρίνειν ἱκανῶς. Quæ verba sic verterim, *Fidem meliùs obtinebunt dicta, si partium argumenta priùs audiantur: nam indictâ causâ sententiam ferre, partémque quamvis inauditam condemnare, minùs addeceat nos (Philosophos nempe veritatem indagantes) oportet enim non tam adversarios esse quàm arbitros (& mediatores) qui de vero congruè velint judicare.* Quâ sententiâ nihil justius, sanctius, prudentius. At porrò, quod generalibus hisce procœmialibus & prælusoriis insistam largiùs & longiùs, excusari potest: primò, quòd in illis se meditanti suggerant observatu non indigna, nec illa passim obvia, vulgóque protrita; sed aut fermè non occurrentia, vel alibi parciùs exposita) nec non in illis quædam paradoxa, vestris adeò cum excitandis ingeniis, tum exercitandis judiciis comparata. Tum generatim distincta comprehensio plurimùm conferre videtur ad subsequentium captum facilem atque perfectam notitiam. Nam de principiis variis & demonstrationibus, de magnitudine, numero, spatio, motu, tempore, velocitate, pondere; de compositione & divisione, terminatione & figuratione, æqualitate & inæqualitate, symmetria & asymmetria, proportione & proportionalitate, similitudine & dissimilitudine, determinatione & indeterminatione; reliquísque talibus à Mathematicis edita tot egregia problemata, tot pulcherrima theoremata legentibus demonstrata, annon prævios istarum re-

rerum conceptus genuinos & adæquatos habere proderit multùm & intererit? Quales ego si minùs edocere possim, saltem occasionem ingeram vobis propositâ ratiocinia maturiùs examinantibus tales acquirendi. Utcunque non parum refert has ambientibus scientias ipsarum communem quasi genium familiariter habere perspectum, & per eas omnes diffusam indolem agnoscere. Et sanè mihi sæpè contingit animadvertere (videor saltem animadvertisse) doctissimos aliquandò viros, ex minus attenta generalium illorum consideratione, & quia non nisi pravos aut confusos (χυδαίους ad minus & ὑπολαΐους) eorum conceptus animo sibi præfigurârint, non rarò crudè, crebrò falsè loqui ac differere, subinde συλοικίζειν in re Mathematica, nonnunquam & παραλογίζεσθαι. Præterea, non illibenter illorum vobis obsequor, & honestæ consulo voluptati, qui cùm ad abstrusiora Matheseôs arcana percipienda minus idonei variant, & adhuc nonnihil imparati, gustum tamen aliquem cupiunt, & capere possunt harum suavissimarum scientiarum; ipsarum non injucundum nec inutile quiddam per transennam inspicere volunt & valeant; quos nolim omnino spe suâ cassos, operæque prorsus irritos, (hoc est, difficultâte nimia vel apparente rerum obscuritate turbatos) dimittere; neque diffiteor ad illorum captum tam dictorum plerunque materiam, quàm dicendi stylum attemperari; multa propterea dici quæ reticerem aliàs, & quæ dicerem, ideo complura prætermitti. Quin sanè metuo, ne plerosque particularium demonstrationum, quales intima tractat

Ma-

Matheſis, arida ſubtilitas, extremus rigor, & penitiſſimam attentionem deſiderans, argumentandi modus aliquantum offendat ac abſterreat; quo nomine, ne diſſimulem, mihi videri ſolent illæ publicis hoc genus lectionibus haud adeò convenientes; unde libentiùs in his non ita jejunis & auſteris materiis aliquam moram traho; ut nonnulla tamen interſpergere ſtudeam (& deinceps, modò pergam in hoc ſtudio, liberaliùs interſperſurus ſim) ad Matheſin interiorem attinentia. Accedit quòd aliquibus, qui ſcientias iſtas primoribus labiis deguſtare non contenti ſeſe velint illis altiùs immergere, totóſque ſe Mathematico gurgite proluere, quíque Lectionibus hiſce noſtris dignabuntur intereſſe, temporis aliquid concedendum exiſtimem, dum hæc perſequimur ἐξωτερικὰ, Geometriæ ſe elementis penitiùs imbuendo, quibus ut non ſegniter incumbant, vehementer ab iis efflagito; alias impoſſibile credo fuerit, ex abſtruſioribus iſtis, imò nec è clarioribus ferè cujuſvis Mathematicæ diſciplinæ documentis quippiam audientibus intelligendum propinare; verùm ſphingis inſtar ænigmatici, vel σκόλοψ cujuſdam Heracliti, meros griphos edere, denſis involvi tenebris videbor. Quòd ſi pleroſque ſcirem Geometricis elementis mediocriter initiatos, poſſem ſpero cum aliquo fructu, nec nulla cum veſtra voluptate, ſeu ſingularum diſciplinarum ima fundamenta detegere, regulaſque præcipuas demonſtrationibus ſuis munitas exhibere; vel quod ſcitu perjucundum eſt, & viros præſertim Academicos decet (qualibus antiquæ ſapientiæ ſtudium, & à fontibus ſuis diſcipli-

nas imbibere præ cæteris incumbit) veterum Mathematicorum in theoremats ſuis inveniendis demonſtrandíſque, adhibitam methodum explorare; vel qui præcipuus eſt ſcopus, & ſummus apex univerſæ Matheſeôs, generales quaſdam methodos faciliori omnifariorum problematum reſolutioni, theorematum inventioni, horum & illorum conſtructioni demonſtrationique, conducentes exhibere demonſtratas, & illuſtratas exemplis; quales multas utiliſſimas & elegantiſſimas methodos veteribus ignotas, ſaltem immemoratas, recentiorum invenit aut protulit induſtria. (Quales ſunt, obiter inſinuo, præter novum à Vieta & Carteſio præcipuè excultum Analyſis modum, cuicunque ferè quæſtioni ſolubili parem; methodus indiviſibilium Cavallerii, jam antehac ſed nunquam ſatis laudata; methodus circa maxima & minima, utilis & ipſa quamplurimis problematis promptiſſimè ſolvendis; variæ regulæ generales tangentium curvas inveſtigandi; modi curvas lineas producendi, ipſarúmque proprietates inveſtigandi ex motuum dependentia, necnon è motuum compoſitione; modi magnitudinum ordine certo creſcentium aut decreſcentium ſeries comparandi, necnon inde planorum & ſolidorum innumerorum menſuras determinandi; regulæ generales pro centris gravitatum expeditè reperiendis, in quolibet genere magnitudinum; necnon è deprehenſis gravitatum centris ipſarum magnitudinum dimenſiones facillimè deducendi; cum aliis minoris notæ pluſculis. Quorum aliquid ſi nunc aggrederer tradere, ſubvereor ut plurimi mentem meam

meam haud penitus assequantur, ex hoc loco fugacia verba proferentis; saltem (ut vobiscum familiariter agam) si liceat aliorum ingenium æstimare de meo; qui me profiteor ita tardum, & minùs ἀξύνετον, ut multo faciliùs capere possim oculis subjecta fidelibus, quàm per infidas aurium cavernulas insinuata. Denique, quò garriendi finem aliquando faciam, quod me spectat ipsum, multum mihi facilius esset, id quod nullo negotio præstare possem, particulares quasdam è Mathematum locupletè penu materias depromere, vel singulares nonnullas, qualium nemini non ad manum ingens prostat copia, conclusiones demonstrare, quàm in hoc Philosophico-Mathematicarum disquisitionum salo fluctuare. Non igitur hæc generalia prosequens otio quicquam meo, sed utilitati potiùs vestræ lito; non desiderio meo gratificor, at vestræ plerorunque, quantùm conjecturâ assequi possum, voluntati morem gero, facturus id semper, & eò mentis aciem intenturus, ut ingenuis vestris votis, mandatis rectiùs dixero, pro mea tenuissima virili parte satisfaciam & obtemperem. Ita causam dixi, quanquam non citatus, apologiam texui, licèt à nemine quod sciam accusatus aut lacessitus; at quî meipsum violatæ fidei purgabo, promisisque non præstiti, quo me velut obstrinxeram hac in Lectione de proportione disceptaturum? Ita fit, multa spondemus nobis, promittimus aliis quæ vix implendo sumus: fidem obligamus faciliùs quàm liberamus. Certè materiam istam cogitatione pererranti, tot se difficultates objectant evolvendæ, tot quæstiones eventi-

landæ, tot expendendæ diverſæ ſententiæ, vix ut in hoc exeuntis termini deliquio tantum ingredi pelagus ſuſtineam, quod præ temporis anguſtiâ emoliri & enavigare nequeam. Aliquid tamen forſan eo præludens attingam, & ſternam utcunque viam ſubtiliſſimæ materiæ enodandæ. Cúmque nihil in hac dixerim ad rem, conabor in duabus quæ ſuperſunt Lectionibus hunc defectum compenſare.

LECT. VI.

EMagnitudinum attributis poſtremas conſideravimus æqualitatem & inæqualitatem, iíſque quoad in nobis ſitum erat, genuinas notiones aſſeruimus. Illas ordine nunc excipere poſſit ratio vel proportio, quippe quæ ferè nihil eſt aliud, quàm ex quantorum comparatione reſultans æqualitatis aut inæqualitatis determinatio quædam. Cùm enim ab æqualitate, quæ ſimplex eſt & ut ita dicam unimoda, recedendo poſſint inter ſe comparabilia quanta, generaliter loquendo, modos inæqualitatis infinitos ſuſcipere, ſingularis alicujus ex his alicujus modi rebus comparatis appropriati determinatio, numeris vel aliis idoneis terminis expreſſa, dici ſolet ipſorum proportio; quâ nempe ſignificatur an ſint æqualia, vel quo certo peculiari pacto ſint inæqualia. Hoc tamen præcipuum magnitudinum ſymptoma, quo diſtinctiùs & clariùs explicatum

tum demus, expedire videtur, cùm ut, propter ſymmetriam & aſymmetriam proportionum doctrinæ neceſſariò intervenientes, nobilem illam magnitudinum affectionem Menſurabilitatem priùs exponamus, tum ut de quantorum ad comparationem aptitudine & ineptitudine (hoc eſt, de ipſorum homogeneitate & heterogeneitate) diſpiciamus aliquantillum; quibus bene perſpectis, facilius erit de proportionis natura judicium. Menſurabilitatem quod attinet, illa vel hoc nomine curioſiùs meretur expendi, quòd ex ea nomen imponatur illi, quæ circa magnitudines occupatur ſcientiæ, reliquorum Mathematum matri ac dominæ; quæ ſcilicet (etſi Platoni viſum eſt perquâ ridiculâ nomenclaturâ) Geometria conſuevit appellari (ex uſu primævo nimirum adſcito vocabulo, quia primitus ad tellurem ſolummodo dimetiendam, ac diſterminandos poſſeſſionum limites adhibebatur) meliúſque quidem Plato latiori ſubſtituto nomine μετρικὴν eam appellat, aliíque poſt eum παντομετρίας titulo donant, eò quòd omnigenas magnitudines dimetiendi rationem edocet: quanquam nec hi ſatìs illi proprium aut adæquatum nomen attribuerint, cùm hæc ſcientia non iſtam ſolam magnitudinis affectionem, at nonnullas etiam contempletur alias, quibus ad menſuram pertinens nihil intermiſcetur. Nec enim tantummodo quantæ ſunt magnitudines diſpicit illa, ſed quales etiam (hoc eſt, quâ partium diſpoſitione, quâ figurâ præditæ ſunt, num rectæ vel curvæ, planæ vel gibbæ, directæ vel inflexæ, rotundæ vel angulatæ ſunt) neque non ubi ſitæ, quam

determinatam positionem obtinent, investigat atq; demonstrat. Magnitudinum (inquam) species & similitudines æquè speculatur, ac ipsarum mensuras & proportiones. Quinimo quoad ipsam praxin, nedum magnitudines inter se metiendo comparare docet, sed & ipsas constituere; describere, transformare; ipsarum centra, diametros, tangentes reperire, nullo quantitatis respectu considerato. Unde liquet obiter, quòd Geometria perperam definitur à plerisque, *Ars vel scientia metiendi*; vel, *Scientia magnitudinis quatenus mensurabilis*: quas à censore suo traditas alicubi carpens, & corrigere præ se ferens D. Hobbius, nihilo meliorem apponit ipse, sed elaboratiùs ineptam, & planius eodem vitio laborantem; *Geometria* (inquit) *est scientia determinandi magnitudinem rei cujuslibet non mensuratæ, per comparationem ejus cum alia, vel aliis magnitudinibus mensuratis.* At verò scìscitor ab his nostræ scientiæ finitoribus: cùm rectam lineam vel angulum rectilineum bisecat Geometer; cùm è dato saltem puncto perpendicularem excitat aut demittit rectam, cùm per datum punctum datæ rectæ parallelam ducit, aut cùm rectam ducit quæ datam curvam contingat; cùm super data recta lineâ triangulum æquilaterum aut quadratum constituit; cùm per tria data puncta circulum describit, aut triangulo dato circulum circumscribit; cùm datæ circumferentiæ centrum, vel datæ conicæ sectionis focum investigat; cùm talia complura peragit, & solam magnitudinum positionem spectantia problemata resolvit, annon officio suo probè defungatur Geometra: quas tamen illic ma-

magnitudines, quoad ipsarum quantitatem comparat inter se, quam ullius mensuræ rationem habet? Nullam prorsus, at solum linearum situm determinat, & punctorum quorundam positionem inquirit. Ut præteream quòd motus æquè pensitat Geometra, quibus figuræ generantur, &c. Inadæquatæ sunt igitur & incongruæ definitiones istæ, falsis in præjudiciis fundatæ. Cognomentum ille, quisquis erat, magis appositum assignavit huic scientiæ, qui μεγεθικὴν appellandum censuit; scientiam nempe circa magnitudines versantem, quæ ipsarum omnigenas affectiones speculatur; hoc est, inquirit, invenit, demonstrat. Quæ proinde non male describitur à Proclo; Γνωστικὴ μεγεθῶν, καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων· ἔτι τε λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς, καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτά, καὶ τῶν πανταχοῦ θέσεων καὶ κινήσεων. Ita quidem; tametsi minimè diffitendum sit in hoc verti magnam hujus scientiæ partem, præcipuum ejus usum in hoc consistere, magnitudinum ut quantitates ex comparatione dignoscantur & æstimentur; hoc est, ut ipsæ quomodocunque mensurentur. Quare non segnem impendemus operam huic magnitudinis affectioni dilucidandæ. Igitur primò vocabuli mensuræ, & ex consequentiâ τῷ mensurare mensurabile, similiúmque παρωνύμων ambiguitates & πολυσημίας evolvere diligentiùs annitemur, tum quoniam id ex se jucundum sit ac utile pernoscere, tùm nè tam ancipitis vocabuli significatione variâ distracti delusique (quod nonnullis accidit) in errorem prolabamur; tum ut hujus symptomatis quæ sit præcipua notio distinctiùs agnoscamus.

noſcamus. Et quidem ſi menſuræ populárem uſum ſpectemus, vix aliquod occurrat vocabulum ad plures ſignificatus detortum, quod Metaphoricos ſenſus obtineat crebriùs, aut aptiùs admittat. Ut inſtemus, viro bono recta ratio virtutiſque præſcriptum, menſura vitæ dicitur & morum, Epicureo homini τὸ ἡδύ, avaro lucellum, ambitioſo potentia civilis & gloria; quoniam ab his hominibus ad iſtas res pleraque conſilia, ſtudia, facta diriguntur & adaptantur; conſuetudo vel opinio populi dicitur menſura decori, quoad externas rerum circumſtantias; uſus communis menſura ſeu norma ſermonis & ſignificatûs vocabulorum. Apud Ariſtote-
Top. VI. 2. lem alicubi lex deſcribitur μέτρον τῶν δικαίων, quia per quandam cum illa congruentiam quid ſit juſtum declaratur ac deciditur. Apud
Met. X. 1. eundem ſcientia vocatur μέτρον τῶν πραγμάτων, quia per illam juſti rerum limites determinantur, quomodo ſe res habent, quouſque tendunt indicatur. Taceo quòd menſura μέτρον μνήμης ponatur pro ipſo judicio, ſeu facultate quâ rerum quantitas diſcernitur ac æſtimatur, ut à Cicerone, cum ait, *Quicquid ſub aurium menſuram aliquam cadit, numerus vocatur*: hoc eſt, id cujus auris quantitatem dijudicare poteſt. Prætereo quoque, quòd perſæpe menſura pro definita rei cujuſvis quantitate legitur uſurpata. Ut in iſtis apud
Sat. XIV. Juvenalem aureis carminibus;

——*menſura tamen quæ*
Sufficiat cenſûs, ſiquis me conſulat edam:
In quantum ſitis atque fames & frigora poſcunt;
Quantum Epicure tibi parvis ſuffecit in hortis.

Quan-

Quantum Socratici ceperunt ante penates.
Nunquam aliud natura, aliud sapientia dicit.

Mensura quæ sensûs; hoc est, quæ præcisa rei familiaris quantitas. ——alibi apud eundem;

——sed quæ præclara & prospera tanti, Sat. X.
Ut rebus lætis par sit mensura malorum?

Hoc est, ut incommodorum quantitas commodorum modum non excedat? Addo Lucanum;

——fuit hæc mensura timoris, Luc. III. v. 100.
Velle putant quodcunque potest ——

Hoc est, tantùm extimescebant Romani, quantùm videbant Cæsarem posse; quia omnia in eos poterat, omnia sibi ab eo metuebant. Non secus accipienda Hesiodi sententia compensare præcipientis beneficia eâdem mensurâ; hoc est, eâdem quantitate, quâ acceperis, vel etiam cumulatione, αὐτῷ τῷ μέτρῳ καὶ λώιον. In sacris etiam literis aliquoties μέτρον hunc habet sensum; ut, Ὡς ἑκάστῳ ἐμέρισεν ὁ Θεὸς μέτρον πίστεως· Rom. 12. 2. hoc est, secundum fidei quam dispensavit Deus quantitatem certam & definitam. Ast infinitum sit omnes usu tritas hujus vocis acceptiones tralatitias & improprias percensere. Meretur tamen etiam ex istis una vel altera notabilior utcunque leviter attingi, Mathematicæ mensuræ notioni propiùs accedens, eíque nonnihil deserviens illustrandæ. Talis est imprimis illa, quâ mensura passim designat justam, debitam, naturæ conformem, aut rationi consentaneam cujusque rei quantitatem, quam si vel excedendo transgrediatur, aut deficiendo non attingat, habetur pro deformi, vitiosa, monstrosa; adeóque

adeóque cujus reſpectu virtus omnis in materia morali, in naturali pulchritudo, in artificiali decus & utilitas æſtimantur. In re morali dico cenſetur omnis virtus (τὸ δέον) cùm ex affectuum moderamine quodam, tum ex actuum certa mediocritate, hoc eſt, ex ipſorum juſta debitáque quantitate, per prudentiæ, ſeu rectæ rationis practicæ, dictamen indigitata. Paritérque vitium in hujus quantitatis exceſſu vel defectu conſiſtere videtur, nec aliud eſſe quàm affectuum ac operum ἀμετρία, hoc eſt, exorbitantia quædam, vel abnormitas à ſtata morum menſura. Quod in hiſce virtutis & vitii formam conſtituit Ariſtoteles, ignorat nemo: diſertiſſiméque (ſecus quàm aliqui cenſent) adſentitur Plato hiſce verbis; Τί δ' τὸ τῷ μετρίῳ φύσιν ὑπερβάλλον ἢ ὑπερβαλλόμενον ὑπ' αὐτῆς, ἐν λόγοις εἴτε καὶ ἐν ἔργοις, ἆρ' οὐκ ἂν λέξομεν ὡς ὄντως γιγνόμενον, ἐν ᾧ καὶ διαφέρειαι μάλιστα πώποτ' εἴτε κακοὶ καὶ ἀγαθοί· hoc eſt, *Quod menſuræ debitæ vel mediocritatis* (τῷ μετρίῳ) *naturam excedit, vel ab ea deficit, ſeu in verbis ſeu in factis, nonne dicemus id revera bonorum hominum à malis diſcrimen conſtituere?* Verba ſunt τῷ Ξένῳ diſſerentis in dialogo, qui πολιτικὸς inſcribitur; cui Socrates adponit ſuum φαίνεται. Quo referendum illud Heſiodi, Μέτρον πᾶσιν ἄριστον, ὑπερβασίη δ' ἀλεγεινή. Menſura in omnibus optima, hoc eſt omni propoſito certus terminus præfigitur, quem non eſt abſque vitio vel culpa tranſilire. Quod & in iſtis teritur;

Eſt modus in rebus, ſunt certi denique fines,
Quos ultra citráque nequit conſiſtere rectum.

Polit. p. 531.

Quic-

Quicquid cum hac mensura coincidit, aut ei satis accedit μέτριον & ἔμμετρον dicitur, & in laude ponitur; quicquid discedit ac abludit ab ea, vocatur ἄμετρον & vitio verti solet. Unde passim qui suos affectus, ambitionem præsertim & animositatem, temperant & bene componunt, appellantur μέτριοι, nec ulla viri politici potior laus habetur. Sed in Ethicam nihil cogitans prolabor; abscedo, tantummodo subjiciam de voluptate cum scientia & ratione comparatis dictum Platonis; Οἶμαι γὰρ ἡδονῆς μὲν καὶ περιχαρείας οὐδὲν τῶν ὄντων πεφυκὸς ἀμετρότερον εὑρεῖν ἄν τινα, νοῦ δὲ καὶ τῆς ἐπιστήμης ἐμμετρότερον οὐδ' ἂν ἕν πατε· *Voluptate nihil difficiliùs ad justam mensuram redigatur, scientiâ & intellectu nihil faciliùs intra debitos fines contineri possit.* In naturalibus etiam forma seu pulchritudo penes hujusmodi mensuram, hoc est, justam quandam magnitudinem, taxatur. Ita qui certam quandam staturam proceritate corporis aut crassitie giganteâ superat, aut incongruè gracilis vel curtus est; cujus aliquæ partes protuberant, aut subsidunt immodice; cui quidvis numero vel mole deest, aut redundat indebitè, dicitur ἄμετρον, & deforme vel monstrosum existimatur. In artificialibus etiam quadantenus è tali mensura dijudicatur τὸ πρέπον & τὸ συμφέρον. Nec enim aliò ferè collineant artes unæquæque, quàm ut justam quandam rebus circa quas occupantur quantitatem conferant, destinatis quibusdam usibus aut apparentiis accommodatam. Unde Plato cunctas artes τῆς μετρητικῆς portiones constituit, & suos ad τὸ μέτριον conatus dirigere docet, quod assequentes opera sua bona

Phileb. p. 405.

In Politico.

bona atque pulchra efficiunt: Τὸ μέτρειον σώζουσαι πάντα ἀγαθὰ, καὶ καλὰ ἀπεργάζονται. Iterum, Μετρήσεως μὲν γὰρ δή τινα τρόπον πάνθ' ὁπόσα ἔντεχνα μελείληφεν. Ahuc expressiùs, Δηλονότι διαιροῖμεν ἂν τὴν μετρητικὴν ταύτῃ δίχα τέμνοντες· ἓν μὲν τιθέντες αὐῆς μόριον συμπάσας τέχνας, ὁπόσαι τὴν ἀριθμὸν, καὶ μήκη, καὶ βάθη, καὶ πλάτη, καὶ ταχυτῆτας πρὸς τοὐνάντιον μετροῦσι, τὸ δ' ἕτερον, ὁπόσαι πρὸς τὸ μέτριον, καὶ τὸ πρέπον, καὶ τὴν καιρὸν, καὶ πάνθ' ὁπόσα εἰς τὸ μέσον ἀπωκίσθη ἀπὸ τῶν ἐσχάτων· hoc est, *Ars dimetiendi (vel mensoria) bisecanda est hoc pacto; ut una pars ejus complectatur omnes artes, quæ numeros, longitudines, profunditates, latitudines, & velocitates contendunt inter se; alia verò reliquas, quæ respiciunt id quod moderatum, decens, opportunum est, & quæcunq; devitatis extremis ad medium nituntur.* Sed de hac acceptione populari modū excessimus. Ei tamen affinem alteram perstringemus; juxta quam mensura designat aliquod statum, communiter agnitum & probatum, sensibus expositum, aut intellectu comprehensum exemplar, ad quod reliquorum in eo genere quantitates aut valores examinari debent aut solent. Ejusmodi mensura duplex est, naturalis & arbitraria. Arbitraria, quales illæ, quas authoritas publica proponit (vasa, pondera, regulæ) ex conformitate vel congruentia, cum quibus reliquæ mensuræ jus suum, nomen, & rationem mensuræ mutuantur; nec aliter mensuræ sunt, nisi quatenus cum istis prototypis consentiunt. Mensura verò cujusque rei naturalis est id quod primum & perfectissimum est in illo genere: quomodo divina natura bonitatis & sapientiæ

tiæ menſura eſt, quia Deus primariò bonus & ſapiens eſt, αὐτάγαθος καὶ αὐτόσοφος· & eatenus aliæ res bonitatis ac ſapientiæ participes ſunt, quatenus cum divina bonitate conveniunt, & ei aſſimulantur. Talem unaquæque res, ex mente Platonis, menſuram habet, idæam ſui æternam ac indefectibilem; exemplar nempe quoddam exactiſſimum, è ſimilitudine vel correſpondentia cum quo vera, pulchra, perfecta cenſetur; & à quo ſi vel hilum diſcordet, eouſque vitioſa eſt, turpis, & imperfecta. Certè ſub finem Philebi res inter primas & ſempiternas τὸ μέτρον primo loco digerit; Πάντα (inquit) φήσεις, ὦ Πρώταρχε, ὑπό τε ἀγγέλων πέμπων, καὶ παρὼν φράζων, ὡς ἡδονὴ κτῆμα οὐκ ἔστι πρῶτον, ἀλλ' ἂν δεύτερον ἀλλὰ πρῶτον μέν πη περὶ μέτρον, καὶ τὸ μέτριον, καὶ τὸ καίριον, καὶ πάντα ὁπόσα τοιαῦτα χρὴ νομίζειν τινὶ ἀϊδίου εἰληχέναι φύσιν· hoc eſt, *Prædicabis omnibus, ô Protarche, cùm aliò nuncios dimittens, tum præſentibus eloquens ipſe, quòd voluptas ſit res nec in primo nec in ſecundo cenſu ponenda, ſed primum dici circa menſuram, & menſuræ congruum & opportunum, & quæcunque talia ſempiternam ſortita naturam putare decet.* Ubi per μέτρον intelligere videtur τὸ αὐτόμετρον, primævam cujuſque rei idæam: verùm in his contero tempus. A popularibus iſtis accedamus ad menſuræ ſignificatus à Mathematicis frequentatos; qui ſanè multiplices quoque ſunt, & à nobis gradatim exponentur, à latioribus ad ſtrictiores procedendo. Convenit autem aliquatenus his omnibus, quam tradit Ariſtoteles, menſuræ definitio ſeu deſcriptio; Μέτρον ἐστὶν ᾧ τὸ ποσὸν γινώσκεται, *Met. X. 1.*

Men-

Mensura est quâ rei quantitas dignoscetur. At cùm diversimodè secundùm varios gradus & respectus apprehendatur hæc quantitatis cognitio, mensuræ consequenter nomen aut latiùs extenditur, aut arctiùs restringitur.

1. Et quidem primò, mensura sæpè ponitur pro re quapiam, quæ alterius quantitatem utcunque monstret & notificet; nec aliud denotat, quàm argumentum certum, seu signum, indubitatum κριτήριον aut τεκμήριον alicujus determinatæ quantitatis. Sic arcus circuli ex angulari puncto ut centro descripti, angulíque rectilinei cruribus interceptus. Et in sphæricis, arcus circuli angulari puncto ceu polo descripti, angulíque sphærici lateribus interjectus, est mensura dicti utriusvis anguli rectilinei vel sphærici: quia si per organicam dimensionem, vel aliter quomodocunque dignoscatur illius arcûs quantitas (hoc est, quæ pars sit, aut quam rationem habeat ad integram circuli circumferentiam, vel ad ejus quadrantem) inde consequenter agnoscetur quantus sit dictus angulus, hoc est, quæ pars sit, aut quam habeat proportionem ad quatuor angulos rectos, vel ad unum rectum. Nec minùs propriè viciſſim angulus, in centro vel polo circuli verticem habens, dici poterit arcûs circularis mensura, quatenus iste per hypothesin aut discursum agnitam habens ad quatuor rectos proportionem arcûs, intercepti rationem indicabit ad totam circumferentiam. (Nam crudè non nemo perperámque dicit arcum interceptum esse propriam anguli quantitatem; cùm non magìs arcus anguli, quàm angulus ipsius arcûs quantitas sit; imò

imò non magis hic quàm ille mensura sit, vel ex parte rei, vel ex usu communi; cùm ipsorum quantitates proportionaliter incedentes coordinentur, connectantur necessariò, se reciprocè prodant & indigitent. Eádemque ratione sectores circulares angulorum, & permutatim illorum hi mensuræ nominentur. Porro, hoc modo nedum magnitudo spatii, spatium motûs ac temporis; at viciſſim quoque motus & tempus spatii, spatium magnitudinis mensuræ dicuntur; quatenus à spatio prius agnito magnitudinis ipsum occupantis quantitas innotescat; à motu vel tempore prædeterminatis spatii percursi quantitas indicetur. Ut si sciatur quantum temporis effluxerit ab ortu Solis, indè colligamus quantam interea paralleli sui peripheriam Sol pervaserit. Quam in mensuræ ratione spatii, temporis, & motûs permutationem exertè notavit Aristoteles;

Οὐ μόνον (inquit) τῷ κίνησιν τῷ χρόνῳ μετρεῖν, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει τὸ χρόνον, διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ἀπ' ἀλλήλων· μετρεῖν τὸ μέγεθος τῇ κινήσει, καὶ τῷ κίνησιν τῷ μεγέθει· πολλῷ γὰρ φαμὲν τῷ ὁδὸν, ἐὰν ἡ πορεία πολλὴ, καὶ ταυτῷ πολλῷ, ἂν ἡ ὁδὸς ᾖ πολλὴ, καὶ τὸ χρόνον ἐὰν ἡ κίνησις, καὶ τῷ κίνησιν ἂν ὁ χρόνος. *Phyſ. IV. 18.*

Ad hæc, ut exempla congeramus, teli vel lapidis jactus juxta modum hunc, licèt imperfectiùs, mensura sit spatii; quatenus si notæ sint, per antecedens experimentum, projicientis vires, inde sciatur quantum inter ejus stationem & missilis casum protendatur intervalli. Imò cùm unaquæque res, agens quodvis naturale, definitam habeat activitatis suæ sphæram, potest aliquatenus

quatenus tale quidvis mensuræ defungi officio. Cùm videlicet ignis ad certum intervallum calefaciendi vim exerat, ultrà nil efficere sentiatur; flosculus, aut odoratum quodvis, aliquousque motivos olfactûs vapores dispergat, objectum visibile conspiciatur è certa distantia, ad longinquiorem dispareat; vocis sonus percipiatur ab auribus intra præfinitum terminum collocatis, ultra quem insensibilis est; si prius ab experientia singulari constiterit, quantus sit hujus cujusque sphæræ (sphæræ dico activitatis) radius, inde de istis interstitiis feratur aliquale judicium; hoc est, istarum virium quantitates exploratæ fient spatiorum quodammodo mensuræ. Ita saltem vulgatum est, ex æstimato spatio quod designato quolibet tempore conficere possit ἔνζων ☉ vir, locorum distantias ab historicis computari; neque non quod ex tempore velificationis ab æquabili vento peractæ maris tractus, & portuum interstitia dijudicent nautæ. Ex perpendiculi verò suspensi recursibus ἰσοχρόνοις dinumeratis perquam accuratè tempus metiuntur Astronomi. Umbra quoque (quantumvis obscura, tenuis, & ferè nulla res) multis nominibus hujusmodi mensuræ rationem subit: ejus motus in horologiis sciotericis temporis quantitatem enunciat; ejus in pariete susceptæ magnitudo Solis apparentem magnitudinem arguit; illa demum in Eclipsibus dimetiendæ veræ Solis magnitudini deservit. Ita nulla fermè res non hujesmodi mensuræ vicem obeat, aut eam æmuletur; & (quod præcipuè notandum) res genere diversissimæ sibi mutuò possint

possint esse mensuræ, juxta latitudinem hujus acceptionis. Aliquanto strictiùs autem secundò, mensura dicitur id, cujus ex quantitate necessariò dependet notitia quantitatis, quâ præditum est mensurabile; adeò ut hujus quantitas non aliter, quàm ex illa præcognita possit innotescere. Qualis quidem respectu præcedentis jamjam expositæ dici possit mensura naturalis, & à priori; quia non adeò desumitur arbitrariè, sed necessariò requiritur, & ab ipsa natura suggeritur, ad dimetiendæ rei quantitatem investigandam. Ita magnitudo est mensura spatii, quia spatii quantitas aliter comprehendi nequit, quàm magnitudinem aliquam realem ei insistentem dimetiendo, vel utcunque sufficienter æstimando. Spatium verò talis est mensura motûs & temporis. Spatium (inquam) ab aliquo notabili cum certa velocitate æquabiliter toto mobili decursum est mensura temporis (mediatè saltem, motûs interventu) nec enim aliter dignosci potest, quantum effluxerit temporis, nisi talis spatii quantitatem æstimando. Arcus e.g. circuli æquinoctialis duos inter meridianos per ortivum Solis punctum in horizonte, perque Solis centrum transeuntes interceptus est mensura naturalis & genuina temporis, ab ortu Solis ad datum instans elapsi. Et arcus in Solis eccentrico, (juxta Ptolemæi doctrinam) est talis mensura temporis annui, quod insumptum est, dum Sol istum arcum pertransivit. Similiter velocitatis, quâ fertur uniformiter aliquid mobile, mensura est spatium designato tempore peractum; hinc enim certam conjecturam faciemus, 2.

quantum ſpatii permeabit id mobile quolibet alio determinato tempore; nec alio modo quanta ſit iſta velocitas poterimus expiſcari. 3. Sed adhuc ſtrictiori modo, tertio, menſura dicitur id, quod propter eximiam quandam determinationem, aut ſimplicitatem, aut notabilitatem, aut facillimam comprehenſionem, aptiſſimè poterit adhiberi ad rerum modos determinandos, aut quantitates inter ſe comparandas. Ita cùm inter duo loca vel puncta deſignata protendantur infinitæ curvæ vel indirectæ lineares orbitæ, penes quas ipſarum diſtantiæ cenſeantur, recta tamen linea propter unitatem & ſimplicitatem ſuam intervallum illud metiri dicitur. Et cùm à dato puncto ad datam poſitione rectam lineam innumeræ duci poſſint inæquales rectæ lineæ, tamen illius ab ea diſtantiam menſurare dicitur recta perpendicularis, quia ſimplex eſt & unica. Propter eandem cauſam diſtantia rectæ in circulo ſubtenſæ, vel circuli minoris in ſphæra à centro circuli vel ſphæræ, pones perpendicularem æſtimatur à centro ductæ ad ſubtenſam, vel ad dicti circuli minoris planum demiſſæ. Parique ratione diſtantia rectarum parallelarum à ſe invicem menſuratur à perpendiculari recta qualibet iis intercepta, diſtantia verò peripherlarum concentricarum à radii cujuſvis è communi centro trajecti intercepta portione taxatur: quia ſemper hæc unius eſt quantitatis. Sic & apud Apollonium in quinto Conicorum, recta linea vertici & puncto in diametro ſignato interjecta nuncupatur ab ipſo (ſaltem ab Arabe qui libros iſtos interpolavit) menſura; quia nulla ſuccurrit

currit aliorum ramorum quantitati determinandæ simplicior aut major. Non absimili ferè ratione, quoniam inter superficies maximè simplex & uniformis est superficies plana; inter planas verò figuras præcipuè comprehensibilis est illa, quæ rectis lineis includitur; inter rectilineas autem figuras simplex, unimoda, facilliméque notabilis est quadratum; ideo quadratum dicitur & haberi solet mensura figurarum superficialium, & quoad fieri potest ad hoc illorum quantitates referuntur. Eadem in solidis est cubi ratio; ad quem propter ejus manifestam determinationem, & bene conceptibilem naturæ proprietatem, aliorum solidorum quantitates exiguntur. In angulis verò rectilineis, mensuræ sic acceptæ rationem subit angulus rectus, quia reliquis aliquo pacto notabilior, & peculiari nomine gaudens, & simpliciorem lineæ insistentis ad illam, cui insistit, respectum includere videtur. Ita denique lineas omnes, curvas atque compositas, ad simpliciſſimam omnium rectam lineam revocare conantur Geometræ, earúmque quantitates ex aliqua, quam ad hanc obtinent, relatione determinare. In aliis quantis eadem observatur ratio. Nam quia cœli (vel ex hypothesi jam receptiore telluris) diurna revolutio motuum maxime constans, uniformis, & notabilis est; idcirco reliquorum in motuum, temporum, & velocitatum mensuram assumitur ac adhibetur. Et ad auri (gravissimíque corporis, eatemsque præsertim determinati, vel ad olei præ cæteris levissimi) quantitatem aliorum ponderum quantitates rediguntur à Staticæ magistris.

Et in alio quovis genere quanti, commoditatis gratiâ, tale quid adsciscitur in mensuram, simplicitate suâ vel mobilitate præluſtre.

4. Sed ad noſtram rem propius quartò, menſura dici ſolet aliquid ut nobis notius, aut quomodocunque determinatius in medium proſertur, aſſumitur, exponitur hâc intentione, ut alia quanta conſiderationi ſubjecta cum eo, vel eo mediante inter ſe ſecundùm quantitatem comparentur; ſcilicet ut inveſtigetur quoties hoc illa continet, vel in iſtis continetur, aut utcunque proportionem illa ſortiuntur ad hoc, & ex conſequentia quomodo referantur ad ſe mutuò, ac ita quantitates ipſorum priùs ignotæ & indeterminatæ dignoſcantur ac determinentur aliquatenus. Ita pes, palmus, ulna, cubitus, orgya; cyathus, ſextarium, modius; reliquæque quarum apud vulgus nomina certam longitudinem aut capacitatem innuunt, magnitudines ſunt ideo menſuræ, quoniam nota communiter, & ex pacto definita ſupponitur ipſorum quantitas; unde per comparationem cum iſtis (ex congruentia vel idoneo diſcurſu) de aliarum ignotarum & indeterminatarum magnitudinum definita quantitate judicetur. Sic & cùm chordarum circuli peripheriis ſubtenſarum quantitas requiritur, aut regularium inſcriptarum circuło figurarum latera quanta ſint inveniendum proponitur, aſſumi ſolet in menſuram circuli radius, ut linearum omnium in circulo notiſſima, penitúſque determinata, inque partes aliquot æquales, tot quot ex uſu viſum fuerit, diviſus ſupponitur, tum quot ex iſtis particulis ſingulæ chordæ, vel ſingulo cuique la-

lateri cedere debent, adhibito Geometricorum theorematum ſubſidio, vel quacunque legitimâ ratione exquiritur & computatur. Vel utcunque per aptam ratiocinationem inquiritur æquatio aliqua, quæ dictarum ſubtenſarum aut laterum ad circuli radium relatio notificari vel exprimi poſſit. Vel denique, ſi fieri poteſt, ipſa chorda, ſeu latus illud quæſitum, actu ducitur & delineatur, ut æſtimetur ex comparatione ſenſibili, vel per organicam commenſurationem dignoſcatur ejus ad radium proportio. Vel ſaltem aliæ duæ lineæ exhibentur, quarum proportio ſit eadem cum proportione dictæ lineæ ad radium: quarúmque proinde quovis modo comperta ratio quæſitam rationem indicabit. Etenim variis hiſce modis quantitatum dimenſio peragatur, & propoſitæ quantitatis ad nobis cognitam, aut natura determinatam ratio exprimi, & æſtimari poſſit. Per numeros ſcilicet, aut per æquationem aliquam, aut per æſtimationem ſenſibilem, ex ipſis iiſdem terminis immediatè, vel ex aliis analogis ad ſenſum expoſitis; quorum etiam dimenſio, idoneis organis explorata, numericam proportionem exhibebit. Sed hæc aliàs pleniùs & diſtinctiùs explicanda ſunt. Ut ad exempla redeam: Simili modo, pro dictarum reliquarum figurarum areis, quantæ ſint, inveniendis, adhibetur quadratum radii vel diametri, ceu menſura quacum conferantur. Neque non ſimiliter in corporum regularium lateribus, ſuperficiebus, ſoliditatibus æſtimandis & comparandis inter ſe, ſphæræ cui includi vel inſcribi poſſunt, radius accipitur; & cum eo,

vel cum ejus quadrato, vel cum ejus cubo contenduntur ista, quo reperiatur, & in censum reponatur eorum mutua proportio. Sic & communiter ab Astronomis astrorum veras inter se distantias, & veras magnitudines indagantibus adhibetur terræ semidiameter, ut communis mensura quædam, ad quam illarum quantitates exigantur. Ut cùm Luna tot semidiametris terrestribus à telluris centro distare, diameter ejus tot ejusdem semidiametri partes aliquotas exæquare perhibetur. Parique modo de reliquis. Neque quod notandum obiter prosequentibus, refert omnino in hac acceptione mensuræ, utrum magnitudo mensuræ vicem sustinens sit major an minor illâ, quæ mensuratur: ut in suprapositis exemplis radius minor est chordâ graduum 120, vel latere trianguli regularis circulo inscripti, sed major chordâ graduum 36. vel latere decagoni, itidem circulo inscripti. Et semidiameter terræ major est semidiametro Lunæ, sed Lunæ distantiâ longè minor. Item assumpto passu Geometrico, per eam æquè comparando dignoscatur, quanta sit longitudo pedalem æquans, ac alia major stadio vel miliari par. Ut neque respicitur hîc utrum collata quanta taliter inter se, vel ad expositam afficiantur mensuram, ut ipsorum proportio numeris exprimi possit; hoc enim modo magnitudines omnes (licèt ipsarum quarundam proportio sit in numeris ineffabilis) sunt inter se commensurabiles; hoc est, ipsarum una designari poterit, ad quam aliarum quantitates referantur, atque per eam mensurentur. Ut radii ad chordam graduum 90, vel latus qua-

quadrati circulo inſcripti, ratio nullis numeris explicari poteſt præcisè, tamen hujus quantitas cum illius quantitate comparari poteſt, & eatenus illæ commenſurantur. Hæc, inquam, adnoto propter illam quæ ſubſequitur, Mathematicis peculiarem, & in uſu frequentiſſimo poſitam acceptionem menſuræ, juxta quam quintò, menſura ſtrictiùs accipitur pro magnitudine, quæ aliam aliquoties ſumpta conſtituit & componit; vel quæ ab alia aliquoties ſublata nihil linquit reſidui, ſed eam penitus exhaurit. Per aliquoties intelligendum ſemel, aut aliquot vicibus, ſecundùm unitatem, aut aliquem determinatum numerum; unde conſtat quòd menſura ſic accepta nunquam excedet rem menſuratam, at vel æquatur ei, vel ejus pars eſt, quæ dici ſolet aliquota, hoc eſt, quæ aliquoties, juxta numerum quemvis, repetita totum componit; vel qualium aliquot totum conſtituunt & adæquant; vel quæ vicibus aliquot abſtracta nihil è toto relinquit. Ita pes eſt menſura paſsûs Geometrici, paſſus iſte ſtadii, ſtadius milliaris & leucæ, quia pes quinquies acceptus paſſum Geometricum efficit, quinquies eum ſubductus perimit. Paſſus verò centies vigeſies quinquies acceptus ſtadium, ſtadius octies ſumptus complet miliare. Sic & minutus horam, hora diem, dies menſem civilem, menſis civilis annum civilem metiuntur. At non hoc modo dies menſem, aut annum naturalem; nec menſis annum naturalem menſurant. Quia dies 365 deficiunt ab anno naturali, 366 eum exuperant: paritérque de reliquis. Hoc autem modo ſemper in elementis intelligun- 5.

tur mensuræ, eique παρωνύμων vocabula; (licèt isthic, quod non nemini mirum videtur, nulla prostet mensuræ definitio) ut cùm initio V. elementi definitur pars (aliquota) Μέρος μέγεθος, τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον· *Magnitudo magnitudinis, minor majoris, pars est, quum majorem ipsa demetiatur.* Hoc est, cùm aliquoties accepta totum sic exhaurit, ut plane nihil supersit. Id enim ibi designat καταμετρεῖν, demensurare, vel penitus emetiri. Ut & simplex μετρεῖν idem denotat passim; & clarissimè initio decimi, ubi definiuntur magnitudines commensurabiles, (σύμμετρα μεγέθη) τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα· hoc est, Quarum utramq; eadem quædam magnitudo aliquoties sumpta constituat, aliquoties adempta tollat. Semper, inquam, per μέτρησιν innuitur perfecta divisio, vel subtractio talis, simplex an multiplex. cui nullum superfit residuum. Ita quoque vocabulum hoc usurpare videtur Philosophus, ista proferens verba; Παρὰ γὰρ τὸ μετροῦν οὐδὲν ἄλλο παρεμφαίνει τὸ μετρούμενον, ἀλλ' ἢ πλείω μέτρα, τὸ ὅλον· hoc est. *Præter mensuram aliquoties acceptam nihil insuper videtur esse totum quod mensuretur.* Unam adhuc strictissimam acceptiunculam suppeditat Aristoteles in Metaphysicis, juxta quam mensura designat id quod in unoquoque genere primum, minimum, ad sensum indivisibile (vel in usu minime divisum) aliorum dignoscendæ quantitati consuevit adhiberi. Quomodo nimirum in numeris unitas, in ponderibus granum, in temporibus minutum, in nummis τὸ λεπτόν, in sonorum intervallis diesis, in

Phys. IV. 20.

Met. X. 1.

lineis

lineis pollex (apud Græcos longitudo pedalis, adteſtante Philoſopho, ἐν ταῖς γραμμαῖς (inquit) χεὼν ὡς ἀπὸμῳ τῷ ποδιαίᾳ) menſuræ ſunt καὶ ἑξοχὴν. Verùm hæc perſequi non vacat. Ut neque jam attexere licet, quænam è dictis præcipua ſit, & maximè propria notio vel acceptio, juxta quam intelligi debet quod præ manibus habemus ſymptoma magnitudinis, Menſurabilitas. Ut & alia complura ſilentio jam comprimenda ſunt. Tempus enim monet ut receptui canam, & vereor ne quis præ cæteris ingenioſus obvio me diaſyrmo feriat, & de menſura ſermocinantem aſſerat ad ſermonis menſuram parum attendiſſe.

LECT. VII.

POſtremà Lectione diverſas uſu tritas vocabuli menſuræ acceptiones haud indiligenter exponere conati ſumus. Eque dictis facilè liqueat, quot accipiantur modis vocabula paronyma. Menſurare. Menſurabile, &c. quot enim modis menſura, totidem illa ſumantur reſpectivè. Reſtat ut juxta quem præcipuè modum, quod præ manibus eſt ſymptoma magnitudinis, Menſurabilitas, intelligi debet, & quæ ſit ejus primaria notio deſpiciamus. Ad hoc ex iis duo modi Mathematicis familiares, à nobis potiſſimùm conſiderandi ſunt, cautéque diſtinguendi, ad quos omnes alii referantur. Primus latior eſt, at maximè proprius, à quo nempe Geometria,

metria, sicut ostendemus, nomen desumpsit, & quem ex officio suo præcipuè respicit; juxta quem mensurare significat alicujus magnitudinis quantitatem notificare vel determinare, respectu magnitudinis alterius homogeneæ, nobis utcunque magìs notæ, vel utcunque determinatæ, declarando scilicet, exhibendo, repræsentando numeris, aut alio modo comprehensibili proportionem ejus cum hoc; significando nempe quota pars illa sit hujus, vel quomodo multiplex, quóve pacto sit inæqualis, quanto excedat, aut quousque deficiat, vel adsimili quopiam modo. E.g. propositâ quâvis longitudine, nobis hactenus ignotâ, si quovis modo (seu operationem organicam, seu per mentale ratiocinium, legitimis hypothesibus, aut prædemonstratis conclusionibus innixum) si quovis, inquam, rationi consentaneo pacto reperiamus quæ sit ejus ad expositam quamvis, à nobis bene comprehensam (puta pedalem) longitudinem in quantitate relatio, quoties illam continet, aut continetur in ea, quanto semel aut aliquoties accepta superat illam, vel ab illa deficiat; num habet se ad illam, sicut numerus quispiam ad alium; vel sicut aliqua recta linea, quam exhibere possum ad aliam, quam etiam possum efficere; vel ut radix alicujus æquationis, quæ analyticæ subdatur ἐξηγήσει, & per artem quomodocunque resolvi possit; tunc eam mensurare dicamur longitudinem. Qualis rectarum longitudinum dimensio nuncupatur μηκομετρία vel εὐθυμετρία (hybridis autem subinde vocabulis, Longimetria & Altimetria). Similiter propositâ quâvis figurâ planâ; cùm

quæ

quæ ſit ejus ad exhibitam aliam figuram planam, pedem videlicet quadratum, proportio colligimus, & numeris aut alio modo repræſentamus, illam habemur dimenſi; cujuſmodi planorum dimenſio dicetur ἐμπεδομετρία, vulgò barbaréque Planimetria. Pari ratione, cùm ſolidum aliquod cum pede cubico, vel cum tanto talique cylindro, vel cum alio probè cognito quovis corpore conferentes, ejus ad hanc rationem expiſcamur, στερεομετρεῖν dicimur. Item, ejuſmodi comparatio laterum & angulorum alicujus trianguli, per quam è notis in eo quibuſdam lateribus aut angulis aliorum angulorum ad veſtum angulum ratio, vel aliorum laterum ad unum deſignatum, & aliunde notum proportio comperiatur, appellatur Trigonometria. Cúmque peripheriam inter & diametrum circuli (nec non inter aream circularem, & diametri quadratum) quænam intercidat proportio, quoad poſſumus exactè conamur definire, tunc operam damus τῇ κυκλομετρίᾳ. Quibus ab exemplis, in id conſultò prolatis, illud conſtat quod dixi, menſurationis hanc maximè genuinam & primariam eſſe notionem, cùm circa illam præcipuæ Matheſeòs partes potiſſimùm occupentur, & ab ea conſequenter denominationem accipiant. Unde penes hanc cenſeri debet affectio magnitudinis, diſquiſitioni noſtræ ſubjecta, quam menſurabilitatem appellamus (Græcè μέτρησιν: magis ambiguo, & cum actu potentiam confundente vocabulo) quæ nihil denotat aliud, quàm magnitudinem cum aliis ejuſdem generis magnitudinibus comparari poſſe, ſic ut ejus, alioquin ig-

notæ & indeterminatæ, quantitas ex relatione, quam ad illas aliquam sortitur, utcunque dignosci possit & determinari. Hoc enim omnicunque magnitudini connatum & essentialiter connexum est, quatenus omnis magnitudo cuivis alteri magnitudini homogeneæ (linea lineæ, superficies superficiei, solidum solido) necessariò vel æqualis est, vel inæqualis aliquo certo modo, qui modus ex parte rei noscibilis est & determinabilis ex se, tametsi persæpe difficulter acquiratur ejus notitia, nec interdum ullo modo queat à nobis accuratè comprehendi. Nec soli magnitudini convenit hæc affectio, sed (quale quid in aliis affectionibus figillatim ostendimus) etiam aliis quibuscunque quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus) ἀναλόγως & suo modo; quatenus ipsorum mutua proportio determinari, exhiberi, exprimi potest, adeóque quantitas unius ex relatione quam habet ad notam alterius quantitatem indicari. Tempus e. g. metimur, quum ostendimus illud tot diebus, horis, minutis æquari, vel ad notum aliud tempus sic habere, sicut ista recta linea, vel ista circuli peripheria ad hanc, quarum scilicet inter se proportionem cognoscimus: velocitatem, quando commonstramus in tempore talem habente proportionem ad aliquod aliunde notum tempus, spatium respectu spatii cogniti tantum peragi; hoc est, ipsam ad notam velocitatem habere proportionem cognitam. Pondus denique mensuramus, cùm perspectum habemus, quantam comperta gravitatis magnitudinem elevare poterit aut sustinere, hoc est, quam rationem habet

ad

ad aliud cognitum pondus. Paritérque reliquis in quantis fese res habet. Sed ut hujus ſymptomatis adhuc dilucidiùs innoteſcat, de talis menſuræ proprietatibus quibuſdam, & de magnitudines dimetiendi modo nonnulla ſubjungemus. Prima menſuræ, qualem jam innuimus, proprietas eſt; ut ſit homogenea rei menſuratæ; hoc eſt, ut cum ea ſecundùm congruentiam & diſcongruentiam, æqualitatem & inæqualitatem, exceſſum & defectum, additionem atque ſubductionem, juxta rationem denique ſeu proportionem comparari poſſit; linea nempe lineæ, ſuperficies ſuperficiei, corpus ſolidum corporis, tempus temporis, velocitas velocitatis, pondus ponderis menſura poteſt eſſe; ſed linea ſuperficiei, ſuperficies corporis, magnitudo temporis, tempus ponderis menſuræ nequeunt eſſe, ſecundùm hanc accuratiorem menſuræ acceptionem. Laxior illa quidem & ſuperius antehac ſatis declarata menſuræ notio, juxta quam quicquid alterius arguit, indicat, aut quomodocunque notificat quantitatem eam menſurare dicitur, etiam heterogeneis quantis competere poteſt, iiſque non rarò tribuitur & applicatur à Mathematicis: eóque modo linea temporis, ſuperficies velocitatis, corpus ponderis, reciprocéque tempus lineæ, velocitas ſuperficiei, pondus corporis menſuræ nuncupari poſſunt ac ſolent. Attamen ſolicitâ circunſpectione diſtinguendæ ſunt acceptiones iſtæ, ne cum D. Hobbio (diſtinctionem iſtam, ſeu ambiguitatem hujuſce vocabuli, non obſervante, vel minùs expendente) multiplices in labyrinthos difficultatum ac errorum improviſò

1.

ruamus. Quales sunt, quòd linea ad tempus (parique ratione superficies ad velocitatem, solida magnitudo ad pondus) proportionem habent: (quia nempe linea tempus, superficies velocitatem, magnitudo solida pondus aliquo modo metiuntur). Quòd eædem sunt omnium rerum quantitates, vel quòd omnium quantitates mutuò sunt homogeneæ; quoniam omnes iisdem mensuris, lineis scilicet & numeris subjiciuntur. Denique quòd unum quantum cujusvis alterius quantitas sit, linea videlicet temporis, velocitatis, ponderis, imò superficiei & corporis quantitas sit, quia mensuræ vice fungens illorum determinat quantitatem. Quæ absurditatum portenta non ex alio, quam ex hujus non animadversæ distinctionis fonte promanâsse videntur. Quod ut breviter instando commonstremus; cùm is sibi præstravisset hanc mensuræ definitionem, mensura est magnitudo magnitudinis, una alterius, quando ipsa, vel illius multipla, alteri applicata tum ea coincidit; subnotâsset autem præterea, lineam motu transactam appellari subinde mensuram temporis, hinc ei proclive fuit colligere, lineam aliquando tempori coincidere, adeóque tempori æquari, vel inæquale esse, & proinde lineam ac tempus mutuam inter se proportionem sortiri, non secus quam linea proportione refertur ad lineam. At verò, si in animum induxisset cogitare, cùm linea dicitur mensura temporis, non strictè sumi mensuram pro quanto, quocum tempus secundùm quantitatem comparatur (nedum non pro parte juxta propriam ipsius definitionem aliquota) sed latiùs,

pro

pro qualicunque indicio vel argumento quantitatis tempori competentis; ad hoc, inquam, si contigisset illi mentem suam tantillùm intendisse, non ita temerè commiscuisset, & confudisset inter se res toto cœlo dissitas diversásque. Sed hæc alibi penitiùs discutienda sunt, cùm de quantis homogeneis & heterogeneis ex composito disseremus. Interim unicum adjiciam huc faciens, animadversione dignum, ideò tantùm heterogenea quanta nonnunquam dici altera alterorum mensuras, quoniam homogenearum mensurarum notitiam utcunque quendam subministrant. E.g. propositus arcus æquatoris, horizontem inter & solem in æquatore positum interceptus, mensura temporis diurni præterlapsi propterea dicitur, quoniam aliunde cognitus ipse per suam proportionem ad totam æquatoris circumferentiam temporis istius rationem coarguit ad tempus integrum diurnum: hoc est, inservit ejus ad propriam homogeneam mensuram comparationi. Sic & linea decursa velocitatis mensura dicitur eatenus, quatenus innuit quæ sit hujus ad alteram præconceptam velocitatem ratio. Nec aliter se res habet in aliis improprie dictis mensuris: unde satis liquidò patet id quòd insinuatum est modò, quòdque sit operæ pretium considerare, reliquas expositas mensuræ acceptiones hanc respicere, vel ab hac desumi. Porro secundò, 2.
altera mensuræ, qualem jam persequimur, proprietas est, & ad illius rationem requiritur, ut quantitatem ipsa determinatam habeat, hoc est unicam, eandem, certam, sibi constantem & invariatam quantitatem, ut

sit,

sit, quod in Metaphysicis innuit Aristoteles, Met. X. 1. ἓν καὶ ἀδιαίρετον, nullam differentiam aut latitudinem admittat, aut quantitatem habeat immotam, & velut in puncto constitutam. Alioquin per comparationem cum ipsa mensuratæ rei justa quantitas æstimari non poterit; at non minus adhuc incerta, indeterminata, ignota permanebit. Unde quicquid anceps significatu, vel naturâ varium est, eatenus mensuræ respuit officium. Ex. gr. pes, pro humani pedis modulo; palmus aut cubitus (itidem humanus) miliare sumptum ἀπροσδιορίστως (non adponendo Germanicum, Italicum, Anglicum) & quælibet talia non sunt rigidè loquendo mensuræ; quoniam inter Herculis clavigeri, telúmque gestantis arundineum Pygmæi palmum, cubitum, pedem immane quantum versatur discriminis. Nec proinde qui propositam longitudinem bipedalem esse dicit, aliquid eo certum indigitat, nisi quem unum præfinitum pedem intelligat, commonstret explicatiùs. Et qui duas urbes unius miliaris intervallo disjunctas pronunciat, illius distantiæ quantitatem non exprimit, nisi quodnam è prædictis miliare respicit, adsignificet disertiùs, & indeterminati vocabuli sensum satis restringat. Item si quis longitudinem quandam exæquari dicat distantiæ solis à centro terræ, nihil dicit, nisi præterea doceat, quam velit distantiam, apogæam, an perigæam, an mediæ longitudinis, an aliam quamvis in solaris orbitæ circumferentia fixam ac determinatam. Denique, si quis rectam lineam parem affirmarit lineæ rectæ à centro cujusdam ellipsis ad ejus ambitum protensæ, neu-

neutiquam ex eo poterit illius rectæ dimensio cenſeri, quia millies mille tales à centro ellipſis deduci poterunt, longitudine diverſæ, & ſibi impares rectæ lineæ, quámque præ reliquis ſignet ille, niſi ſubdat aliquam ulteriorem determinationem, conſtare poterit nemini. Porro notandum, quòd non unius ſit modi, ſed aliquam differentiam admittat hæc determinatio quantitatis, adeóque conſequens illam menſuræ ratio nonnihil erit diverſa. Nam alia determinatio quodammodo naturalis eſt & univerſalis, alia ſingularis & prorſus arbitraria. Naturaliter & genericè determinatur id quod certam naturam habet, & ſemper eodem modo reſpicit ea quanta cum quibus comparatur, aut quibus dimetiendis inſervit; unde habet, quod immediatè ſit aptum natum eorum proportionibus generaliter determinandis: & conſequenter etiam ſingularibus ipſorum quantitatibus notificandis, modò ſingulariter ipſum notum ſupponatur. Quo pacto circuli radius & latus quadrati naturaliter determinata ſunt: radius, inquam, circuli taliter determinatur, quoniam ſimilium arcuum ſubtenſæ, & ſimiliter utcunque poſitæ quælibet in circulo rectæ lineæ proportionem ad radium eandem habent, & ex relatione ad radium ita quantitate determinantur, ut eo ſingulariter determinato, ſemper earum quantitas una ſingulariter determinatur. Ut in quocunque circulo, majore nil refert animadvertere, latus hexagoni radio æquatur, ſinus rectus graduum 30 radii dimidius eſt, chorda graduum 90 radii potentiæ dupla eſt, unde ſi determinetur & cog-

noſcatur ipſa ſingularis radii quantitas (hoc eſt, ſi ſenſûs æſtimationi ſubdatur, vel numero denominetur alicujus ſingularis cognitæ menſuræ) innoteſcat inde ſtatim dictarum linearum quantitas. Similiter è cognito latere quadrati, exceſſus diametri ſupra latus, & aliarum definite poſitarum in quadrato linearum quantitas facilè certóque dignoſcatur. Hujuſmodi verò determinationes adhibet, & circa tales dimenſiones occupatur Geometria theoretica; quæ nempe non tam immediatè ſingularium magnitudinum quantitates, quàm univerſalium rationes inveſtigat; è quibus tamen ſingularium dimenſiones fluunt, vel in iis fundantur. Arbitrariè verò determinantur illæ menſuræ quæ ſingularibus dimetiendis quantis applicantur; quæ nempe cùm nullam ad id ex ſe peculiarem aptitudinem habeant, ex infinitis ſui generis aliis ad libitum ſeliguntur, ex pacto vel inſtituto deputantur huic officio metiendi. Qualem obtinent determinationem paſſus, ſtadius, arundo, ſchœnus, aliæque quæ verſantur in uſu communi, quáſque Geometra practicus adſumit in peculiarium magnitudinum dimenſione. Verùm non eſt quod his ſatis à ſe perſpicuis diutiùs immoremur.

3. Tertia menſuræ proprietas eſt, ut ejus quantitas ſit aliquatenus præcognita, cum enim (juxta definitionem Ariſtotelicam, μέτρον ἐστι ᾧ τὸ ποσὸν γνώσκεται) menſuræ ratio præſertim exigat, ut quantitatem ignotam declaret, priùs ipſa cognoſcatur oportet: ſiquidem ab ignoto nihil innoteſcat, ab obſcuro nihil illuſtretur. Advertimus autem quòd & quantitatum notitia ſit diverſimoda: de quibus

bus primò, una radicalis est, absoluta, prima notitia, quâ res sensibus exposita quanta sit abipsis immediatè discernitur & æstimatur, illam velut intuitu quodam attingendo, neque præterea cum aliis quantis comparando. Hoc modo notum habetur in Geometria quicquid efficere possumus vel exhibere, ignotum verò cujus constructionem ignoramus. Ut si proponatur circulus aliquis, Geometris notum est latus inscripti regularis trigoni, tetragoni, pentagoni, hexagoni, decagoni, pentecaidecagoni, omniumque progredientium duplo deinceps ab his numero (vel etiam aliquatenus triplo, quia per Geometriam planam communem bisecari, perque sectiones conicas utcunque trisecari potest arcus quilibet, vel angulus designatus) sed complurium aliarum regularium figurarum latera sunt ignotiora, nixque nulla scientificâ ratione possunt exhiberi. Quin etiam hoc modo singularis expositi circuli peripheria nota dici potest, quia quanta sit utcunque sensu potest apprehendi, tametsi cum recta linea justè comparari nequit, & quæ sit ejus ad hanc exacta proportio forte nullatenus comprehendi potest à nobis. Veruntamen sicut recta linea conspectui repræsentata speciem imprimit sui, certumque de se judicium procreat, à quo nota dicitur: ita circuli circumferentia suæ quantitatis ideam insculpit phantasiæ, juxta quam cognita reputetur. Neque forsan magis recta linea sui generis lineis, quam peripheria circularis peripheriis circularibus, & aliis quæ ad eas referri possunt lineis dimetiendis appropriatur & congruat. Cæterum hoc mo- 1.

do notæ sunt, nec alio modo, primitivæ quæque mensuræ, ad quas ejusdem generis mensuræ referuntur; quarum quidem quantitatem vix aliter explicare licet, quàm ad illas digitum intendendo, déque ipsarum quantitate percunctanti respondendo, tanta est quantam intueris, aut sensu percipis. Unde consectatur, ut hoc modo quidpiam dignoscatur, & prototypæ mensuræ rationem subeat, imprimis exigi, ut à sensu quopiam æstimabilem quantitatem habeat; & proinde tùm ut subjiciatur sensui, tum ut mediocrem habeat quantitatem, intra debitos limites ita consistentem, ut sensus in ejus æstimatione non facilè decipiatur, hoc est, ut si considerabile quid apponatur ei, vel ab ipsa subtrahatur, non id sensum effugere queat. Quapropter optimè notat Aristoteles, id quod obiter moneri par est, cæteris paribus minimas sensibiles magnitudines mensuræ vicem obire commodissimè: *Met. X. 1.* Ὅπου μὲν γὰρ δοκεῖ μὴ εἶναι ἀφελεῖν ἢ προσθεῖναι, τοῦτο ἀκριβὲς τὸ μέγεθος· *Ubi nihil adjici potest aut adimi, quin à sensu facilè percipiatur & agnoscatur discrimen, id accuratissima fuerit mensura.* Minora verò quanta præsertim talia sunt, quoniam majora faciliùs aucta vel imminuta sensûs judicium latent; Ἀπὸ γὰρ σταδίου ἢ τάλαντος, ἢ ἀεὶ τοῦ μείζονος λάθοι ἂν προστεθὲν ἢ ἀφαιρεθὲν μᾶλλον ἢ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος· *A stadio vel talento, & universim à quolibet majore magis lateat ablatum aliquod aut adjectum, quàm à pede, vel ab obolo, vel à quovis minore deductum, seu ei appositum.* Unde concludit Philosophus, Ἀφ' οὗ πρώτου καὶ τίνων αἴσθησιν μὴ ἔχομεν, τοῦτο πάντες ποιοῦσι μέτρον,

πρῶτον, καὶ τότ' οἴονται εἰδέναι τὸ πρῶτον, ὅταν εἰδῶσι διὰ τοῦτο τὸ μέτρου (*Id à quo primum quoad sensûs æstimium nihil abstrahi potest, mensuram statuunt omnes, & tunc se quantum aliquod arbitrantur cognoscere, quum per hujusmodi mensuram cognoscunt*). Saltem hoc nomine sunt ad hoc ineptæ, & ab originalis hujusmodi mensuræ, ratione penitus excluduntur omnes grandiusculæ magnitudines; eò quòd illorum differentiæ nequeunt omnino, vel non satis exquisitè dijudicari à sensu. Nam, ut Optici notant, distantiæ pedes ducenos superantes à visu, sensu longissimè pertingente, discerni nequeunt, & sibi videntur omnes æquari (Luna nempe, Sol, stellæ fixæ, quamvis revera tot milliarum myriadibus aliæ aliis longinquiùs à nobis semotæ, videntur nihilominus omnes intervallo pari distare, ac velut unius cujusdā in oculo centrum habentis sphæræ perimetro versari) quin & earum quæ ad dictum intervallum propiùs accedunt, longitudinum differentiæ vix æstimantur à sensu. Unde etiam evenit, quòd (propter radiorum nempe visualium longiùs procurrentium veras differentias non animadversas) objecta planities, campestris vel æquorea, videatur assurgere, vel in gibbam superficiem intumescere. Sed de hujusmodi notitia sensibili nimis. Cognoscitur secundò, quantitas ex collatione cum mensura quapiam per sensum expositò modò dijudicata; quando nempe scitur quam in quantitate relationem habet ad istam, quoties eam continet, aut in ea continetur, quanto superat eam, vel excediturabea. Hoc modo nota quanta mensuræ possunt esse dicique, sed mediatæ vel 2.

ſecundariæ. Magnitudines, inquam, neutiquam ſenſibus objectæ, nec ab iis ullatenus æſtimabiles menſuræ rationem bene ſuſtentent, ſi per dimenſionem organicam, vel per legitimum qualecunque ratiocinium reperta fuerit ipſarum ad alias ſenſu jam æſtimatas proportio. Semidiameter e.g. telluris, etſi nemini viſa, ſenſûſque noſtri tranſcendens æſtimium, poterit tamen eſſe menſura magnitudinum ac diſtantiarum, quas habent cœleſtia corpora, modò per idoneas hypotheſes, & probum diſcurſum innotuerit, quot ipſa ſtadios, paſſus, aut pedes complectitur ac exæquat. Vel quòd ita ſe habet ad aliquam ex iſtis prænotis menſuris primitivis, ut talis expoſita recta linea ad aliam rectam
3. lineam exhibitam. Verùm adhuc tertiò, peculiari ratione notum dicitur id, quod numeris exprimitur, ejus relationem denotantibus ad expoſitum aliquod priùs æſtimatum quantum (ſive familiari nobis uſu præcipue cognitum, ſeu gratis & ex arbitrio ſumptum) ſi nempe concipiatur illud præcognitum quantum vel indiviſum, hoc eſt, unitate deſignatum, vel in æquales aliquot partes diſtributum, juxtaque diviſionem iſtam certo quodam numero denominatum, tunc autem reperiatur quis numerus iſtarum partium æqualium, vel quot ex iſtis unitatibus, vel quæ pars iſtius unitatis conveniat propoſito quanto, dicetur inde perfectè notum illud quantum, hoc eſt, in datæ menſuræ partibus notum. Quinimo ſæpe quantum, alioqui ſenſibus expoſitum, & per ipſos æſtimabile (vel cujus ad expoſitam ratio per terminos ſenſibiles æſtimetur) nihilominus ignotum

cen-

cenſetur, donec ejus ad ſtatam aliquam menſuram proportio in numeros redigatur, per numeros explicetur. E.g. quamvis in aliis quo circulo ductus fuerit, & oculis objectus ſinus rectus graduum 30, tamen aliquatenus ignorata reputabitur ejus quantitas, donec animum advertendo, ratiocinandóque colligamus eum adæquari dimidio radii; tunc autem penitiſſimè comperta cenſebitur ejus quantitas. Id quod (ignota ſcilicet haberi, quorum ad ſolennem & uſitatam aliquam menſuram ignoratur in numeris ratio) cauſis è compluribus oriri videtur. Tum primò, quia judicium ſenſûs magis lubricum & incertum, minúſque perſpicax & exquiſitum eſt, quàm in numerorum certâ proportione fundata quantitatis æſtimatio; tum ſecundò, quia facilius & commodius, per numerorum ſymbola repræſentantur animo, quàm reipsâ ſenſibus exhibentur quantitates, aut quantitatum rationes: tum tertiò, quia ſenſibiles objecti ſpecies magis evanida, fluxa, mutabilis eſt, quàm numerus, qui facillimè retinetur in memoria, chartæque commendatur; ubicunque nullis ferè mutationibus, accrementis, decrementis obnoxius aſſervatur. Tum denique quartò, quia numerorum interventu rerum omnium quantitates ad paucas, familiares admodum, ab omnibus, & ex condicto communiter uſurpatas menſuras rediguntur. Quas (& ſi quæ ſunt conſimiles) hujuſce rei cauſas (quamobrem ſcilicet id præcipuè notum & penitus exploratum habetur, cujus ad àliquid antea cognitum ratio numeris exprimitur) etſi conſideratu non indignas, quoniam ad alia prope-

ro, jam tranſilio. Singulares hactenus at-
4. tigi quantorum notitias; at quartò, notum quodammodo dicitur omne quantum (ſicut & determinatum ut ſupra diximus) cujus generalem naturam utcunque comprehendimus, etſi ſingularem ejus quantitatem ignoramus, aut non conſideramus. Ita ſcimus quomodo ſe habet in circulo radius, in quadrato latus, etſi quæ ſit hujus aut illius radii circularis, vel lateris quadratici ſingularis quantitas neſcimus aut negligimus. Quomodo præſertim nota ſunt illa quanta, quæ aliorum generationi præſternuntur & inſerviunt, adeóque generationem conſequens omne determinant, indéque naturâ ſuggerente menſuræ ſibi munus aſſerunt. Ut ſi circulus procreatus ſupponatur ex revolutione radii, quadratum ex ductu lateris in ſe, vel ejuſce motu recto parallelo; quoniam omnium reliquarum in circulo vel quadrato linearum quantitas atque poſitio dependent ex radii lateriſque quantitate, ac motu tali, proinde primariò nota, nec immeritò, cenſentur illa; ſúntque primitivæ generales menſuræ, ex comparatione cum quibus, quæ ipſorum reſpectu ſimilem perpetuò determinatum ſitum obtinent, generali conſequenter modo dignoſcantur; hoc eſt, horum ad illa conſtans proportio ſciatur, adeóque quantitas etiam horum ſingularis non lateat, ex hypotheſi quod illorum ſingularis quantitas innoteſcat. Siquidem compertâ duorum quantorum proportione, ex uno eorum cognito protinus alterum cognoſceetur. De menſuræ proprietatibus hactenus; jam quod in propoſita methodo ſuccedit, de menſurandi modis pauculà ſubdemus.

nus. Varii sunt ii, sed nos præcipuos aliquos cogitanti semet obijcientes perstringemus. Comparantur inter se homogenea quanta utcunq; ignota & determinata, cum notis & determinatis; hoc est, mensurantur primò, per merum ratiocinium ipsorum proportiones indagando. Sic ex radio dato colligit Geometra quantum sit latus inscripti regularis trigoni, demonstrando scilicet è suis principijs, quod sit potentia triplum radij. Sic & ex aliunde prænotis apparente Lunæ diametro, Lunæque distantia ab oculo quanta sit ejus vera diameter, declarat ope canonis sinuum, Geometricis è ratiocinijs constructi. Hic modus omnino theoreticus est, utpote quo generalis quantitatum dimensio perficitur, quam sola ratio potest attingere; proinde modus hic perfectus & ad rigorem exactus est. Secundò, per solam organicam dimensionem, quæ deservit ignotorum quantitatibus ad certæ mensuræ numeros adducendis; istis præsertim quæ nequeunt à sensu commodè saltem & satis accuratè æstimari. Ita arcus & angulos per quadrantes circulares in gradus & minuta distributas, longitudines autem per regulas & scalas in æquales particulas utcunque divisas metimur. Hic modus circa sola quanta singularia versatur, & pure mechanicus est, nec ideo plerunque præcisus & accuratus. Tertius autem modus per discursûs, & organicæ dimensionis, mentis & manûs, conjunctas peragitur operas. Qui quidem practicus est, & versatur circa τὰ κατ' ἐκάστου, sic tamen ut generalium theorematum opem adsciscat; unde pede claudicat uno, sed altero re-

1.

2.

3.

rectus & certus incedit, heroicúmque refert genus quatenus Geometriæ regulas adhibet, divinitatem quandam habens, æternæ & indefectibilis veritatis particeps, quatenus autem mechanicam αὐτάρκειαν desiderat, caducum, & mutabile, peccatis & erroribus obnoxium. Hoc modo nedum obvia quæque nobis ob oculos, ante pedes, intra contactum posita, sed & res innumeras manibus intractabiles, vestigiis nostris impervias, imò sensibus ipsis inaccessas, & vix animo bene comprehensibiles attingimus ac dimetimur; telluris profunditatem & ambitum, astrorum magnitudines & intercapedines. & quicquid cum quantis organicæ dimensioni subditis aliquam sensibiliter finitam proportionem habet. Nam ex mechanicè dimensorum ad alia dimensionem excedentia proportione, etiam horum quantitatem, Geometriæ subsidio prorsus infallibili ratione perscrutemur licet & pernoscamus. His subjicio modum, juxta quem sciscitantibus quanta sit aliqua magnitudo respondemus, ipsam realiter exhibendo sensibus æstimandam, aut per dictam organicam dimensionem ad cujusvis mensuræ cognitæ numeros reducendam. Ut si quis interroget quanta sit recta linea à dato puncto circulum propositum contingens, Satisfactum erit quadantenus, Geometricè ducendo rectam istam, & quærentis oculis ostentando. Nam ita vel ipsam intuendo quanta sit discernet, aut ad scalam quamvis examinando quot notæ mensuræ particulis præcisè vel præterpropter adæquetur comperiet. Quintus modus est, quo declaretur ignota quantitas per æquationem aliquam, quæ

4.

5.

quæ ipſius ad alias notas quantitates utcunque relationem exprimat, adeóque menti præbeat ipſam aliquouſque comprehendendam; cujus quidem æquationis artificioſa reſolutio juxta regulas quaſdam ei propoſito accommodatas, & in analytica doctrinæ præſcriptas, dimenſionem hanc integrè conſummabit, quæſitámque quantitatem, ſen Geometricè ſeu Arithmeticè, reddet perſpectam. Ita ſi detur circuli radius & arcûs deſignati tangens, quæratúrque quanta ſit tangens arcûs dupli, repræſentabitur ejus quantitas per talem æquationem: $xrr - xaa = 2rra$; vel $rr - aa. 2rr :: a. x$. Tangens quæſita dati dupli arcûs ducta in differentiam quadratorum radii, & notæ tangentis arcûs ſimpli æquetur duplo quadrato radii ducto in tangentem arcûs ſimpli. Vel quod eodem recidit per hunc analogiſmum; Exceſſus quadratorum radii & datæ tangentis ſe habet ad duplum quadratum radii, ſicut data tangens ad tangentem quæſitam. Quo theoremate præſtantiſſimus D. Pellius Longomontani tetragoniſmum refutavit. Item ſi detur in numeris ſubtenſa cujuſvis arcûs, & radius circuli ponatur unitas, & quæratur quanta ſit hujus arcûs triplicati ſubtenſa, quantitatem iſtam hujuſmodi declarabit æquatio: Quæſita ſubtenſa tripli arcûs æquabitur triplæ ſubtenſæ dati arcûs ſubtripli minùs ejus cubo; $(q = 3z - z^3$; vel $qrr = 3zrr - z^3)$. Quod theorema conducere poſſet eidem propoſito.

$r =$ *radius.*
$a =$ *tangens data.*
x, *tangens quæſita.*

$z =$ *arcus.*
$q =$ *arcus triplus.*

Sed his ulterius explicandis immorari non li-

licet. Indulgete tamen oro patientiæ veſtræ pauxillum, alteram menſuræ præcipuam notionem leviùs attrectanti, ſub hac tamen conditione, nè vobis per aliquot abhinc ſeptimanas iterum faſtidio ſim; quòd ſi viſus ero juſto ſolitóque prolixior, perſpicite vel hinc quàm ægrè divellar à conſpectu conſortióque veſtro, quámque vobis illibenter valedicam. Altera principalis menſuræ acceptio, juxta quam ſemper in elementis deſignat id, quod aliquoties acceptum exactè componit & conſtituit, vel aliquouſque ablatum perimit, & penitus exhaurit rem homogeneam menſuratam, ſatis antehac ipſa per ſe luculentè deſcripta eſt in Lectione præcedente. Quoad hanc autem intellecta menſurabilitas itidem quantis omnibus convenit; ſiquidem omne quantum (magnitudo quidem πρώτως καὶ ἁπλῶς, reliqua verò quanta ἑπομένως καὶ κατὰ θέσιν) ſuo modo menſurabile eſt ſecundùm hanc notionem, hoc eſt, diviſibile quotvis in partes ſeu gradus æquales; vel quovis numero denominabile, repræſentabile, explicabile eſt; prout à Trigonometris radius circuli quantumvis exigui diviſus ſupponitur in centies millenas, vel milies millenas, aut utlibet plures particulas æquales; & tempus quodvis utcunque breviuſculum in minuta quotvis diſpertiatur pro computantis arbitrio; & velocitatis ponderiſque cujuſvis tot gradus ſupponere licet quot quiſque velit. Numerus enim quilibet quanti cujuſvis idoneum ſymbolum eſt, ei ſignificando comparatum: & ſicut numerus quilibet Mathematicus, conflans nimirum unis æqualibus inter ſe, ab

uno

uno toties accepto componitur, eóque toties abstracto exhauritur; hoc est, ab eo exquisitè dividitur & mensuratur, ita correspondenter numero quovis expressum quantum (hoc est, juxta numeri istius exigentiam in tot æquales particulas distributum singulas uni respondentes) à quavis per unum designatâ particulâ mensuratur. Nihil hîc subesse difficultatis videtur aut obscuritatis: & hujusmodi mensuræ respectu comparata quanta dici solent à Geometris symmetra vel assymmetra, quorum symptomatum contemplatione nihil in Mathematicis mirabilius est ferè vel utilius, quamvis nihil à vulgari captu conceptúque remotius. Notat Aristoteles hinc desumptâ instantiâ, quantum admiratio plebis imperitæ discrepet & adversetur sententiæ peritorum atque scientium; siquidem inter ea, ad quæ vulgus potissimùm stupet, censetur ἀσυμμετρία διαμέτρου (incommensurabilitas diametri cum latere quadrati) θαυμαστὸν γὰρ εἶναι δοκεῖ πᾶσιν, εἴ τι οὐκ ἐλάχιστον μετρεῖται· *Omnibus*, hoc est τοῖς πολλοῖς, *mirabile videtur, si quid aliquousque magnum non possit admodum exiguâ quâpiam alterius homogenei quanti mensurâ exhauriri; contrà verò nihil magis Geometra miraretur, quàm si non contingeret hoc*, οὐδὲν γὰρ ἂν θαυμάζειεν οὕτως ἀνὴρ γεωμετρικὸς, ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητὴ. Plato verò communem hujus passionis ignorantiam patheticè deplorat, quam & vocat γελοίαν καὶ αἰσχρὰν ἄνοιαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσι, *ridiculam & turpem inscitiam plerorumque omnium hominum animis insidentem*: neque non sibi videri prædicat non tam humanum, quàm pecuinum affe-

Met. I. 2.

Plato VII. de Leg. versùs finem.

affectum talia non percipere: Τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα, καὶ ἔδοξέ μοι τοῦτο οὐκ ἀνθρώπινον, ἀλλ' δεινῶν τινῶν εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων. Se denique Græcorum omnium causâ pudore non modico profitetur affectum, quoniam hanc tam obviam quantorum passionem plerique nescirent; & contrario potiùs errore abducti, magnitudines ejusdem generis omnes inter se commensurabiles existimarent. Ἡγήνθην δὲ οὐχ ὑπὲρ ἐμαυτοῦ μόνον, ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ ἁπάντων τῶν Ἑλληνίων, &c. De his igitur adeò mirandis
1. symptomatis tantillum videamus. Quod symmetriam attinet, penes vulgus, & apud scriptores exotericos aliquando denotat rei cujusque debitam quantitatem, intra certos naturæ suæ congruos fines constitutam. Ut
Eth. II. 2. apud Aristotelem in Nichomachiis, Τὰ ποτὰ καὶ τὰ σιτία πλείω, καὶ ἐλάττω γενόμενα φθείρει τὴν ὑγίειαν, τὰ δὲ σύμμετρα ποιεῖ, καὶ αὔξει, καὶ σώζει. Ubi σύμμετρα bene vertas modica, moderata, conformia, à debitæ quantitatis modulo neutra ex parte, nec excessu nec defectu aberrantia. Plato in Politico, Δέοτερον δὲ περὶ τὸ σύμμετρον, καὶ καλὸν, καὶ τὸ τέλεον, καὶ ἱκανὸν. Ubi τὸ σύμμετρον idem valet, vel affine est τῷ pulchro, perfecto, idoneo; quod ejus declarat acceptionem. Sæpiùs autem apud eosdem symmetria rei variis ex partibus compositæ, decoram & aptam in partibus congruentiam, seu conformitatem inter se mutuam designat; in qua præcipuè consistit pulchritudo rerum & elegantia: quapropter in Architectura talis potissimùm symmetria spectatur, & à Vitruvio sic defi-
Vitruv. I. 2 nitur; *Symmetria est ex ipsius operis membris*

con-

conveniens conſenſus, ex partibúſque ſeparatis ad univerſæ figuræ ſpeciem, ratæ partis reſponſus. Juxta quas acceptiones, ex contrariorum ingenio, ſatis liquet quid ſit aſymmetria, rei ſcilicet enormis, immodica, diſcongruens, exceſſiva vel defectuoſa quantitas; vel inepta & indecora partium aggregatio. Hiſce verò tralatitiis ſignificationibus obmiſſis, ſymmetria ſecundò, nonnunquam denotat 2.
quamvis magnitudinum (aut aliorum quantorum) comparabilitatem inter ſe, quoad quantitatem, hoc nempe ſecundùm alteram latiorem acceptionem σῦ menſurare, pro comparare rerum quantitates inter ſe, vel ignotæ quantitatis ad notam inveſtigare proportionem. Quomodo ſymmetrum nihil eſt aliud quàm homogeneum, & aſymmetrum prorſus idem cum heterogeneo; quatenus ejuſdem generis omnia quanta proportionem habent inter ſe, adeóque ſunt hoc modo commenſurabilia; quanta verò diverſi generis nullam ad ſe mutuò rationem habent, adeóque nullatenus commenſurari queunt. Ita lineæ cunctæ σύμμετροι ſunt inter ſe, ſed linea reſpectu ſuperficiei vel corporis, reſpectúque temporis, velocitatis, & ponderis, ἀσύμμετρα eſt. Verùm communiter apud 3.
Geometras ſtrictiùs dicuntur σύμμετρα quanta, quæ ab eodem quolibet homogeneo quanto menſurari; hoc eſt, perfectè dividi, ſicut nihil ſuperſit reſidui, perque ſubtractionem ejus (ſive factam ſemel, ſeu quotieſcunque repetitam) penitus exhauriri queunt: vel, quorum idem quantum eſt pars aliquota nonnulla: vel, quæ ſe habent ſicut numerus aliquis ad alium generis numerum (unitatem adſcribendo

scribendo numeris). Quomodò nimirum uncia, pes, & passus, sunt symmetræ lineæ, quoniam uncia semel accepta seipsâ, duodecies accepta pedem, sexagesies accepta passum constituit; vel toties ablata dividit, ut nihil remaneat; vel quoniam se habent hæ longitudines ut numeri 1, 12, 60. Sic in ponderibus marca & libra sunt commensurabiles, quoniam tertia pars solidi metitur utrumque, nempe quadragies accepta marcam, sexagies sumpta libram efficit; vel quia sunt ut 2 & 3, in temporibus cyclus Solis cyclo Lunæ commensurabilis est, quoniam se habent ut 28 ad 19, & annus unus utrumque demetitur. Alb hæc satis perspicua sunt. Assymetra verò quanta sunt, quorum omnino nulla reperiri potest, imò nulla datur in rerum natura quantumlibet minima communis mensura, quæ nempe toties accepta compleat hoc, toties illud; toties & toties, juxta quoslibet numeros, ablata complete dividat utrumque; sic ut nihil relinquatur; quæ non se habent uti ullus quicunque numerus ad alium quemcunque; nullam habent proportionem numeris ullis, integris aut fractis, explicabilem: quorum proinde si quod unum numero exprimatur aliquo, reliquum prorsus ineffabile erit. Cujus affectionis celeberrimum & pervulgatissimum exemplum præstant latus & diameter quadrati, quæ sic afficiuntur inter se, ut nulla quamcunque proximè ad atomum accedens lineola metiatur utrumque. At si millies millesima pars unius, puta lateris, applicetur alteri, nempe diametro, vel auferatur ab ea quoties fieri potest, semper ad extremum restabit aliquid, & quamvis com-

pleta

pleta fiet congruentia vel divisio. Et hoc quidem est illud mirabile symptoma quod humanum penè captum superat, & horum insuetos meritò torquet; id quod adhuc fortasse mirabilius videatur, modò perpendantur una vel altera, quam subjiciemus, observatiuncula. Primò, quòd si proponantur 1.
incommensurabilia duo quanta A, B. possit inveniri quantum alterutri A commensurabile qualibet in proximitate ad B, vel differens à B minùs quam assignabili quavis quantitate (id quod facillimè demonstrari potest, & confectatur, ni malè commemini, Lemmatio quodam, quod habetur demonstratum in libro tertio sphæricorum Theodosii). Unde patet illud quicquid est, à quo quantorum hæc incommensurabilitas exurgit, vel quo incommensurabile quantum exsuperat, vel non attingit aliud exposito quanto commensurabile, fore infinitè parvum, minus quovis assignabili, vel per animum comprehensibili quanto. Quod & ex radicum extractione (numerorum scilicet irrationabilium quos vocant) est pariter manifestum: illhic enim ad verum quæsitæ radicis valorem propiùs semper & propiùs acceditur, ad infinitum progrediendo, nunquam tamen illius valor obtineri poterit; hoc ἀξιοδάκρυτον, præsertim cùm secundò, non solùm simpliciter 2.
incommensurabilia sunt quanta, sed & plures (fortassis infinitos) incommensurabilitatis quasi gradus videntur admittere; ut unum nempe quantum respectu quanti cujusvis expositi magis alio à commensurabilitate procul elongetur. Et aliud magis hoc, & sic porro deinceps, donec extremum ali-

vide Cavaller. Exerc. p. 526.

quod à primo velut infinito distet intervallo. Notavit ὁ σοφιστὴς quasdam lineas cum exposita quapiam nedum longitudine, sed quod magis est etiam potentiâ incommensurabiles esse; atqui nonnullarum etiam quadratiquadrata cum expositæ quadriquadrato, & quævis harum potestates superiores cum illius potestatibus respectivè coordinatis incommensurabiles sunt. Unde si cujus potestas velut infinitè ab unitate dissito numero denominata sit expositæ respectivè coordinatæ potestati incommensurabilis, illa videtur expositæ respectu gradus incommensurabilitatis velut infinitos sortiri. Quomodo se res habere videtur in circuli circumferentia respectu radii. Nam inscripti quadrati latus est longitudine radio incommensurabile, & proinde quadrati ambitus est radio incommensurabilis. Octogoni verò inscripti quadratum est incommensurabile radii quadrato, & proinde quadratum octogonalis perimetri est incommensurabile quadrato radii; neque non ita continuò regularium inscriptorum circulo polygonorum ambitus potestates habent superiores coordinatis radii potestatibus incommensurabiles, unde polygonum horum ultimum, hoc est, ipse circulus, videtur habere perimetrum infinitis gradibus incommensurabilem cum radio. Quod si verum fuerit, actum erit de circuli tetragonismo, cùm ratio circumferentiæ ad radium inde sit ex natura rei penitus inexplicabilis; adeóque problema illud, talis rationis ἐξήσησιν desiderans, solutu sic impossibile, vel eo potiùs ipso solvatur, quod impossibile deprehenditur. Siquidem duo-

duobus punctis resolvitur problema, vel ostendendo quale sit & quomodo fiat quod requiritur, vel indicando quod fieri nequit. Sed hoc tantum mysterium tribus verbis evolvi nequit; si tempus & opportunitas fuissent, plura saltem huic explanandæ firmandæque conjecturæ conatus essem producere. Denique, nè sim ultrà tædio, monebo præter hæc tantum, præcipuam asymmetriæ rationem in hoc videri fundatam; quòd cùm inter duos numeros planos sibi similes (hoc est, qui procreantur ex multiplicatione numerorum inter se proportionalium) semper inveniri possit medius numerus proportionalis (quippe productus è numeris planis similibus in se multiplicatis est semper numerus quadratus, cujus radix est iste numerus proportione medius), item inter solidos duos similes numeros semper intercedunt duo medii proportionales; & pari modo duos inter similes planoplanos dantur tres proportione medii, ac ita porro quoad reliquas ulteriores imaginarias dimensiones; cùm, inquam, in similibus numeris ita se res habet, idque demonstretur in Elementis, omnino secus accidit in numeris planis, solidis, planoplanis, & reliquis dissimilibus: nam ex parte rei nullus datur inter planos duos dissimiles numeros medius proportionalis numerus; nec inter solidos dissimiles duo, nec inter planoplanos tres, ac ita deinceps; id quod etiam ibidem ostenditur. Unde si duo quanta ponantur habere se in ratione duorum numerorum planorum dissimilium, & hæc inter quanta reperiatur medium proportionale, quod perpetuò fieri

potest ob indefinitam cujusque quanti divisibilitatem, nullus extabit numerus in universa rerum natura, qui repræsentet hoc quantum, aut ei respondeat, & consequenter hoc, illis primò positis, pérque numeros expressis, ἀσύμμετρον erit. Eodem discursu, si inter duo quanta dissimilibus numeris solidis expressa duo reperiantur quanta proportione media (quod & rei natura patietur fieri) nullum tota, quanta quanta, est numerorum series suppeditabit hisce repræsentandis idoneum numerum; adeóque hæc respectu quantorum expositorum ineffabilia prorsus erunt, & incommensurabilia. Unde patet in transcursu, quòd numerorum quàm aliorum quorumcunque quantorum infinities restrictior, & quasi pauperior sit natura; pauciſſimis enim, comparatè loquendo, quantorum proportionibus exprimendis sufficiunt, aut inservire valent, numeri rationales seu vulgares: nec aliter plerarunque figurarum regularium, cùm latera, tum areæ quàm per surdos & irrationales numeros exhibentur aut explicantur. Verùm hæc tantummodo cursim & tumultuariè licuit insinuare, fusiorem explicationem desiderantia. Jam nihil superest, præterquam ut vobis (auditores optimi & humaniſſimi) grates referam propensiſſimas & amplissimas, pro eximia vestra per totum hujusce longiusculi termini decursum, liberaliter indultâ nugis nostris patientiâ. Utinam aliquando tam benignâ candidâque attentione digniora, votisque vestris acceptiora posthac nobis obtingant argumenta dissertandi; quæ & vestram magis oblectent ingenuam curiosi-

tatem,

tatem, & noſtram exacuant tenuem induſtriam. Interim valere dico vobis, & animitus voveo. Valete, bono cum Deo.

Hactenus Lectiones, ut habitæ ſunt publicè, ſic ordine deſcriptæ veniunt nuſquam interturbato; nunc ſeriem abrumpo. Cùm enim nec lege tenear, & præ tædio laboris ac temporis penuria non poſſim omnes (at ſaltem decem ad minus) exhibere, decrevi reliquis aliquot intermiſſis tres ultimas adponere.

FINIS.

FINIS.

ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis:

An. Dom.

M. D C. L X VI.

LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli*. 1684.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

SAlutem gratulor, auditores optimi, voveóque perquam vobis diuturnam, nec ultra de procœmiis ſolicitus penſum repeto, ſic ut methodo pridem inſtitutæ pergam inſiſtere. Propoſitum fuit (meminiſtis opinor) generales magnitudinum (& inde reliquorum quantorum) affectiones pertractare. E quibus cùm pluſculas excuſſerim, pro meo modulo non incuriosè, nunc ad illam Matheſeôs velut animam penè deventum eſt, proportionalitatem; è qua ferè pendet quicquid uſpiam in Mathematicis mirabile vel abſtruſum demonſtratur. Cùm autem proportionalitas in comparatione proportionum, proportio conſiſtat in comparatione rerum quantarum, expedire videtur, προλεγόμενα, ſeu præluſii loco, ut de quantorum imprimis ipsâ ad

proportionem requisita comparabilitate dispiciamus. Nec enim omnia quanta sic inter se comparari possunt, ut mutuam habere dicantur proportionem, at illa tantùm quæ peculiari ratione se propriùs attingunt, cujus gratiâ dici solent homogeneæ. De quantorum igitur homogeneitate & heterogeneitate jam disquiremus. In hanc verò rem imprimis notandum præter attributa communia, quæ conveniunt omnibus quantis, eáque distinguunt à rebus quantitatis expertibus (extensionem nempe, divisibilitatem, mensurabilitatem qualescunque, & his connexas passiones) alias haberi differentias, quæ res quantas dispescunt à se invicem, & in proximè subordinata genera distribuunt; sic ut quæ sub uno generum istorum continentur omnia dicantur homogenea, quæ sub diversis collocantur, heterogenea vocitentur. Sunt autem ista subordinata quantorum genera veluti totidem classes & prædicamenta quantitatis, eodem ferè modo sub quantitate disposita, quo vulgaria prædicamenta sub Ente; valde discreta à se mutuò, prætérque dictas illas generales quantitatis affectiones nihil inter se commune vel simile fortita. Cæterùm istarum convenientia & diversitatis ratio generalis est aptitudo vel ineptitudo, capacitas aut incapacitas quantorum ad compositionem seu coalitionem in unum totum; vel ad subtractionem seu constitutionem novi residui; addibilitas, ut ita dicam, vel inaddibilitas unius ad alterum; subducibilitas vel non-subducibilitas unius ab altero; excessus certus est animo comprehensibilis unius supra alterum, vel defectus unius

ab

ab altero; vel talis excessûs aut defectûs incapacitas; & hinc æqualitas vel inæqualitas unius respectu alterius: in his, inquam, & hæc concomitantibus aut consectantibus fundatur homogeneitatis & heterogeneitatis ratio respective. Nam quæ sic affecta sunt, ut possint esse partes unius per se mente conceptibilis quanti, in unam summam aggregari, adjectione sui se mutuò augere, vel detractione minuere; quæ certo excessu vel defectu differunt à se invicem; quorum unum haud impropriè vel ineptè dici possit æquale alteri, vel altero majus minúsve; homogenea sunt, & ad eandem quantitatum inter se comparabilium classem pertinent; quæ secus heterogenea, diversas ad tribus inter se discretas & ἀσυμβλήτους referenda. Sin hujusce varietatis originem ulterius persequi libeat, & unde talis subinde quantorum incomparabilitas exurgat indagare, ex hujusmodi ferè causis ipsam comperiemus proficiscì. Primò, ex valde di- 1.
versâ quorundam quantorum naturâ, quâ fit ut uni communi mensuræ subjici nequeant, quæ pariter utrique congruat aut conveniat; imò nec ut ipsa mens nostra possit ea connectere, vel sub unius certi quomodocunque uniformis compositi ratione concipere; non secundùm æqualitatem aut inæqualitatem, excessum aut defectum, ullatenus se contendere vel committere inter se. Ita v.g. magnitudo, pondus, velocitas, tempus, resistentia, vis, heterogenea & incomparabilia sunt; quia naturâ discrepant adeò, nihil ut commune metiatur ipsa; nec quomodo possint ipsorum quælibet connecti, congruere,

re, compositum aliquod non admodum difforme & Chimæricum ingredi; sibimet adæquari, se superare, mentis acies omnino valet attingere. Quis enim intelligat qualis summa conficiatur duobus annis ad tria milliaria adjunctis; quanto tres unciæ ponderis excedant duo minuta temporis; quid supersit si ex tribus cylindris auferantur quatuor gradus velocitatis? non magìs quàm quot toni musici tot radios lucis adæquent, quot odores tot coloribus æquiparentur. Hæc nempe quò minùs ad se juxta quantitatem intelligibili quopiam modo referantur, ingens obsistit naturæ dissimilitudo atque distantia. Magnitudinis quantitas continua est & simultanea, absoluta, sensibus attrectabilis & conspicua; temporis fluxa, successiva, menti tantùm imaginabilis, motum consequens & connotans; velocitatis quantitas à temporis & spatii conjunctis rationibus pendet; pondus, vis, & resistentia, quasdam actiones implicant, & ex effectibus quibusdam censentur. Ita dissonant hæc inter se, ut in unum refugiant compingi. Hæc prima sit & potissima τῆς ἑτερογενείας causa. Altera ratio discriminis istius petatur ex variis quoad quantitatem quasi gradibus perfectionis; quatenus aliqua quanta pluribus modis extenduntur, & plurifariam dividi possint præ aliis, sic ut hæc istorum respectu sint quodammodo non quanta; nec possint adeò cum illis secundùm quantitatem comparari. Ita pluribus modis divisibilis est superficies quàm linea, corpus quàm superficies; nec aliter se habet linea ad superficiem, & ad corpus superficies quàm punctum ad lineam,

2.

hoc

hoc est, quàm indivisibile ad divisibile, vel ut non-quantum ad quantum (linea siquidem respectu superficiei nihil aliud est fere quàm punctum longum, & superficies respectu corporis nil aliud quàm linea lata, vel punctum quasi longo-latum) igitur ἀσύμβλητα sunt linea, superficies, corpus, adeoque heterogenea. Evenit enim inde quòd hæc secundùm æqualitatem & inæqualitatem inter se nequeant comparari, nec ita componi, ut summam aliquam conficiant, nec unum ab alio subtrahi sic ut aliqua resultet differentia, nec incrementum pariant addita, nec decrementum ablata. Eadem est ratio instantium respectu temporis; graduum velocitatis crescentis singulis instantibus acquisitorum respectu velocitatis integræ, conatuum itidem momentaneorum respectu motûs, & ponderis, & potentiæ; hæc enim inferioris & imperfectioris naturæ sunt, quàm ut illis ullatenus æquiparentur, & genere conveniant. Verùm adhuc tertiò diversitatis hujus origo sit indefinitus & incomprehensibilis unius quanti respectus ad aliud; qualis inter res (alioquin nomine naturâque cognatas) finitas & infinitas versatur. Unde diversi generis habentur linea recta finita & infinita; quamvis in infinita recta reperiatur linea quævis recta finita, censeríque possit ista constituta ex hac infinities repetita. Hinc πολυθρύλλητον illud, finiti ad infinitum nulla est proportio (λόγος δ' οὐκ ἔστι τοῦ ἀπείρου πρὸς τὸ πεπερασμένον, apud Aristotelem) cujus tamen gnomes, seu axiomatis pervulgati veritatem quadantenus infregisse videtur modernorum Geometrarum solertia, 3. *De Cælo l. 6.*

ta, dum innumerorum planorum & solidorum ad infinitum protractorum cum aliis planis & solidis finitis justam proportionem & ipsissimam æqualitatem demonstrârint, id monstri primùm exhibente clarissimo Geometra Torricellio. Ex quo pateat infinitas magnitudines finitis interdum homogeneas esse, cùm iis æquentur, & ab iis interdum excidantur. Vel inde potiùs inferatur, non quicquid extensione interminatum est, idem esse quantitate prorsus infinitum; vel adhuc explicatiùs, quod ab unius dimensionis infinitate non semper consequatur superficiei, vel corporis infinitas; cujus rei ratio non admodum difficilis videtur, id enim accidit ex eo quòd unius dimensionis infinita diminutio compenset alterius infinitum accrementum; unde non adeò fidem exsuperat magnitudinem finitam, utcunque perexiguam, longitudine protendi ad infinitum. Igitur ut veritatem suam universalem tueatur, ita debet explicari prænotatum axioma: finiti magnitudine vel quantitate, ad magnitudine vel quantitate in illo genere infinitum proportio nulla est. Non autem ut intelligatur generatim terminatæ figuræ ad magnitudinem interminatam nullam dari rationem. His è radicibus pullulat heterogeneitas quantorum, & quæ contrario modo conveniunt inter se; quæ naturâ non adeò dissimilia sunt inter se, nec in diverso quantitatis gradu constituta, nec infinito intervallo à se ditempta sunt, ea sunt homogenea. Cæterum Euclides in definitionibus libri quinti, homogeneas magnitudines definit, quarum una, minor scilicet, aliquoties ac-

accepta seu multiplicata, potest alteram excedere. Istius libri definitio tertia talis est: Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Ne quis autem dubitet quid per magnitudines homogeneas intelligit subjungit, Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται ἃ δυνάμενα πολλαπλασιάμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. Ubi ὃ συνεχιστὴς, sicut rectè meâ sententiâ notat doctissimus & clarissimus vir, in sua adversus Meibomium disputatione, non id agit (ut præter Meibomium alii exponunt, & quod demiror ille sagax Clavius eò videtur propendere, quamvis alibi diversa tradat) ut ostendat quænam homogeneæ magnitudines rationem habent (quasi ex illis aliquæ nullam haberent) at verò potiùs quænam magnitudines sunt homogeneæ, ne quis istius vocabuli, in præcedente definitione positi, obscuritate deceptus erret, aut suspensus hæsitet. Quum enim isthic proportionem definit, relationem magnitudinum homogenearum, indefinitè proloquens, satis innuit, se magnitudines homogeneas universaliter, non quasdam solummodo particulares intelligere; alioquin etiam nisi quantis omnibus homogeneis mutuam inter se proportionem existimâsset competere, perperam illas ceu subjectum proportionis inseruisset ejus definitioni; rectiúsque secluſis illis earum loco adæquatum aliquod subjectum statuisset. Vult igitur omnes homogeneas magnitudines proportione versus se mutuâ affectas esse; igitur lineæ duæ, una finita altera infinita, quamvis in genere lineæ quodammodo conveniunt, non sunt ex Elementoris sententia

tia homogeneæ, quia finita quotieſcunque ſumpta nunquam ſuperabit infinitam; paritérque ſe res habet in quovis finito reſpectu cujuſvis alterius quantitate infiniti (quantitate dico, non extenſione locali, propter ante jam inſinuata) itidémque juxta hanc definitionem ſatis liquet puncta, lineas, ſuperficies, corpora eſſe heterogenea; quatenus non innumerabiles punctorum myriades unicam certiſſimam lineolam, non millies millenæ ſuperficies unicum excedant minutiſſimum corpuſculum. Sic & anguli plani κεραλοειδεῖς, ſi modò anguli ſunt, aut quomodocunque quanti, quorum utrumque dubitatur & denegatur à præclaris Mathematicis, de qua re nihil ego quicquam in præſens diſceptabo; at ſaltem, inquam, ſi cornicularis iſtæ divergentiæ, quas efficiunt rectæ lineæ cum curvis quas contingunt ſint verè anguli, quantitate præditi, rectilineis ſaltem angulis homogenei non erunt; quia minimus quilibet vel acutiſſimus angulus rectilineus infinitis vicibus excedit innumerabiles iſtos κεραλοειδεῖς. ſicut Euclides de corniculari quem efficit tangens cum peripheria circuli, Apollonius de illis quos efficiunt tangentes cum ſectionibus conicis, * Archimedes de iis, quos conſtituit tangens cum ſpirali demonſtrârunt, nóſque poſſimus unicâ demonſtratione univerſali, è motuum compoſitione petita, de omnibus ad eaſdem partes convexis curvis demonſtratâ dare: ſic ut non aliter iſti contactûs anguli ſe habeant ad angulos rectilineos, quàm punctum ad lineam, vel linea ad ſuperficiem. Lineæ verò omnes finitæ quantumvis diſſimiles ſibimet ho-

* *Saltem ex demonſtratis ab eo conſectetur id.*

homogeneæ ſunt, nedum rectæ rectis, at curvæ rectis, & curvæ quævis inter ſe; quatenus tametſi de curvarum plerarumque determinatis ad rectas proportionibus (ut peripheriæ circularis aut ellipticæ ad aliquam è diametris) nondum conſtet, in dubium tamen ſit aliquam inter eas proportionem exiſtere; quia nempe v. g. diameter circuli quater acceptus circumferentiam excedit. Quinimo quod ſibi gratuletur habet præſens ætas, in eo quòd humano quam ingenio crediderunt, aut valde ſuſpicati ſunt, impervestigabilem anteriores Geometræ, quarundam curvarum ad rectas proportionem mirifica ſubtilitate adinvenerint, ſatíſque perſpicuè demonſtrárint hodierni Geometræ. Pariter ſuperficies omnes finitæ ſuperficiebus finitis homogeneæ ſunt, etiam planæ curvis quandoquidem harum ad illas proportio non ſolùm poſſibilis adſtruitur, at qualis ſit facilè demonſtratur, ſicút ab Archimede cui circulari areæ planæ recti coni, recti cylindri, ſphæræ, ſphæricæque cujuſvis portionis curva ſuperficies adæquatur. Conſimiliter & omnia ſolida ſolidis finitis homogenea ſunt. Imò ſi anguli omnino quanti ſunt, & æqualitatis vel proportionis participes (quod ut diximus ambigitur) etiam anguli rectilinei curvilineis nonnullis homogenei erunt, hoc ſenſu, quoniam ex iſtis aliqui horum nonnullis æquales demonſtrantur, à Proclo ſcilicet libro tertiò ad axioma duodecimum. Saltem verò homogenei ſunt inter ſe cuncti anguli rectilinei. Hæc autem adeò manifeſta viſa ſunt Archimedi, ut non dubitárit aſſumere quòd quævis determinata ma-

gnitudo possit multoties adjecta sibi, vel aliquoties multiplicata quamvis aliam ejusdem classis magnitudinem superare. Ἔστι (inquit in præstratis libro nobilissimo de sphæra & cylindro, hoc est, præterea assumo) τὰ ἀνίσων χραμμῶν καὶ ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συνιὸν ἑαυτῷ ἑαυτοῦ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. Cui simile postulatum præmittit Clavius elemento decimo: Postuletur quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamvis magnitudinem ejusdem generis excedat. Nec minus evidens est tempora quævis finita temporibus finitis homogenea esse, quia brevissimum minutum sæpiùs replicatum longissimum quodcunque superabit æternitate minus durationis intervallum. Etiam velocitates omnes homogeneæ sunt, quatenus utcunque perexiguus & plusquam testudineus velocitatis gradus satìs multis vicibus repetitus, rapidissimam primi mobilis velocitatem transcendet. (Cùm & alioquin repugnare videatur infinitam dari velocitatem; siquidem ea præditum mobile distantiam in unico πάντῃ quantamvis emetiretur, adeque plura simul loca posset deret, hoc est, congrueret spatio seipsum quantumlibet excedenti, quod videtur impossibile). Numeri verò possunt omnes invicem esse homogenei, quatenus omnes ejusdem generis magnitudinibus repræsentandis apti nati sunt inservire; possunt etiam quicunque sibi mutuò heterogenei censeri, quatenus diversi generis quantis exprimendis adhibeantur; imò quilibet numerus quo-

quodammodo potest heterogeneus esse sibimetipsi, quatenus idem heterogenea quanta repræsentet; nullus enim numerus est qui non linearis, planus, solidus, planoplanus, planosolidus, solidosolidus, esse possit; qui non dimensiones quascunque naturales aut fictitias subire concipiatur, pro computantis arbitratu. Pondera vero modò solis solidis corporibus gravitas assignetur (ut certè solis assignatur in Physica) sunt inter se omnia homogenea; sin superficiebus & lineis ut magnitudo quædam, ita gravitas nonnulla tribuatur (id quod supponunt Geometræ, dum trianguli, parallelogrammi, plani parabolici, reliquarúmque planarum figurarum; neque non superficies sphæricæ, conicæ, cylindricæ, & reliquarum curvarum superficierum; item dum linearum quarumvis, seu curvarum seu ex rectis compositarum, centra gravitatis investigant; hoc, inquam, posito) non omnia pondera sunt homogenea, sed illa tantùm quæ ejusdem generis magnitudinibus inhærent. Unde non immeritò Platonem reprehendere videtur Aristoteles, quòd (in Timæo) corporum in gravitate differentias aut excessus imputat τῷ πλήθει τῶν ἐπιπέδων. Siquidem superficierum siquæ sunt gravitates quotlibet aggregatæ corporis gravitatem constituere nequeunt vel adaugeri, diversi generis cùm sint, nec eapropter ad hoc idoneæ. Nec aliò sanè tendunt hæc omnia, quàm ut sciamus quæ quanta quibus quantis secundùm quantitatem conferre liceat; nullum enim in Geometria majus peccatum est, quàm heterogeneorum quantorum inter se rationem

De Cælo, III. 1.

inquirere vel asserere. Ut si quis quærat quot tantæ lineæ rectæ æquentur tali quadrato; quot peripheriæ tantæ circulares tali circulo, quot quadrata tali cubo, quot tempora tali spatio vel ponderi. Unde summus artis analyticæ præceptor Vieta, primam hanc in omnibus disquisitionibus analyticis observandam legem præstituit; *Isag. cap. 3.* *Prima & perpetua lex æqualitatum seu proportionum esto, quæ quoniam de homogeneis concepta est, dicitur lex homogeneorum, hæc est, Homogenea homogeneis comparari* (exclusivè nimirum, homogenea solis homogeneis comparari). *Nam* (subjicit) *quæ sunt heterogenea quomodo inter se adfecta sint cognosci non potest, ut dicebat Adrastus.* * *Cap. 19.* Rectè sic Adrastus* apud Theonem Smyrnæum, Τὰ μὲν ὁ ἀνομογενῆ, πῶς ἔχει πρὸς ἄλληλα, φησὶν Ἀδρᾶστος, εἰδέναι ἀδύνατον. Verum est apud illos, qui in problematum solutionibus aut demonstrationibus theorematum præclaram illam adhibent methodum indivisibilium, ejusmodi sæpe voces occurrere; Omnes istæ lineæ parallelæ tali plano æquantur, summa planorum istorum parallelorum tale solidum constituit; explicant verò mentem suam, & per lineas nil aliud intelligere se dicunt, quàm admodum exiguæ & inconsiderabilis (verbo veniam) altitudinis parallelogramma; per plana consimiliter altitudinis haud computandæ prismata vel cylindros. Aut saltem per summam linearum & planorum non summam denotant aliquam finitam & determinatam, sed infinitam aut indefinitam rectæ cujusdam lineæ punctis ἀριθμουν. Ex quali infinita inferiorum homogeneorum summa componi fu-

superiùs heterogeneum (ex infinitis puta lineis rectis superficiem planam, ex infinitis peripheriis concentricis circulum planum, ex infinitis superficiebus planis vel curvis solidum corpus) si quis asserat id quod magnus ille Galilæus asserere non dubitat, haud facilè poterit erroris convinci, vel funditus expugnari. Sed utcunque, dimissâ istâ controversiâ, nihil usus iste nostræ quicquam officit doctrinæ, & vel illorum qui methodum istam ambabus ulnis amplexantur, sententiâ irrefragabiliter valet hoc præceptum, ne defuita quantitate vel numero heterogenea comparentur inter se. Quod cùm ex se liquidò verum & summopere rationi consentaneum sit, de eo tamen, ut ex parte jam antè monui, movit nuper controversiam noster D. Hobbius, & rem adeò claram spissis quantum in se nebulis offuscavit. Nec enim lineas & tempora, quamvis inter se dissitissimæ naturæ, velut homogenea quanta, mutuámque sortita proportionem veretur inter se comparare. Nam quia motibus ἰσοταχέσι percursæ longitudines se habent ut tempora, *Erit* (inquit) *permutando ut tempus ad longitudinem, ita tempus ad longitudinem.* Quasi diceret, Quoniam stadius ad mille passus se habet, ut hora una ad octo horas; ergo permutatim ut stadius ad unam horam, ita mille passus ad octo horas; cujusmodi argumentatio nemo non perspicit quàm sit absonè ridicula. Idem in Dialogis, quibus hodiernâ examinare profitetur & emendare Mathematicam (exoptare liceat, utinam saltem pensitatiùs examinàsset, & feliciùs emendâsset suam) *Erit*, inquit, *ut quantitas ponderis ad longitudinem lineæ quæ*

De Corp. cap. 16.

Dial. 3. p. 80.

ipſam repræſentat, ita quantitas ponderis dupli ad longitudinem lineæ duplæ ipſam repræſentantis. Adeò ſcilicet hunc errorem à redargutore ſuo monitus omnino recuſat deponere; aſt ejus excuſandi vel propugnandi gratiâ novas procudit vocabulorum definitiones & acceptiones, tam ſibi parum conſonas, quàm ab uſu communi ſemotas, & concluſionibus plerunque ſuis repugnantes; miros comminiſcitur prætextus alienos & abhorrentes ab omni ſyncera ratione, quod paucis oſtendere non abs re fuerit, cùm elucidandæ rei ſubjectæ causâ, tum ne quis in ſimiles lapſus incautè ruat & quò pateat quàm in his rebus oportet circumſpectè verſari. Menſuram hoc modo definit ille, *Eſt menſura magnitudo una alterius, quando ipſa vel ipſius multipla alteri applicata cum ea coincidit.* Et rurſus, verbis paululum immutatis, ſed in eandem mentem; *Menſura eſt magnitudo magnitudinis minor majoris vel non minoris, cùm minor ipſi applicata ſemel vel pluries ipſam æquat.* Juxta quas definitiones patet menſuram nihil eſſe aliud, quàm rei menſuratæ partem aliquotam, quæ nimirum aliquoties accepta totam illam exhaurit, ut nihil ſuperſit reſidui; quomodo vocabula μέτρον, μετρεῖν, καταμετρεῖν, ſæpiùs aut ſemper accipiuntur in Elementis, ut antehac oſtenſum; *Homogeneas porro quantitates* definit, *quarum menſuræ applicari poſſunt una ad alteram, ita ut congruant.* Et *quarum menſuræ* ἐφαρμόζουσι. Menſuræ verò ſunt ei, ut jam viſum, partes quantorum aliquotæ. Ergo modò ſibi conſtet, quantitates homogeneæ erunt, quarum partes aliquotæ congruere poſſunt. Verùm par-

Dial. 1. p. 11.

Dial. 2. p. 43.

Pag. 110.

Dial. 3. p. 80.

partes aliquotæ quantitatis temporis non aliæ ſunt quàm quantitates temporis, nec ponderis quàm quantitates ponderis, nec lineæ quàm lineæ, neque corporis quàm corpora. Ergo cùm nemo concipere poſſit quo pacto quantitas lineæ quantitati temporis (puta lineæ quantitas cubitalis annuæ vel unciali temporis aut ponderis quantitati) poſſit applicari, ſic ut ei congruat aut coincidat; non erunt lineæ temporis & ponderis quantitates homogeneæ, juxta proprias ipſius definitiones ac hypotheſes. Ita communis intuliſſet Logica, verùm miriſicâ ſagacitate contrarium is colligit; *Quoniam* (inquit) *quantitas temporis per lineam menſurari poteſt, & linea lineæ applicari poteſt, erit quantitas temporis quantitati lineæ homogenea.* Ecce ſontem, ex quo complura quibus iſti dialogi ſcatent abſurda promanàrunt. *Quoniam quantitas* (ait) *temporis per lineam menſurari poteſt:* aſqui reſpice ſodes, ingenioſe vir, tuam ipſius definitionem, & vide num juxta illam linea poſſit eſſe menſura temporis (aut quia malis involutiùs loqui, quantitas temporis) h.e. linea poſſit eſſe pars aliquota quantitatis temporis, vel an quantitas temporis conflétur ex lineis, vel an linea ſit aliqua quantitas temporis (pars enim aliquota quantitatis temporis eſt aliqua quantitas temporis) pariq; ratione num linea ſit quantitas ſuperficiei, corporis, ponderis, & alterius cujuſvis quanti; vel an omnes omnino quantitates componantur ex lineis; quantitas (inquam) annua vel menſtrua, quantitas uncialis aut pondialis, quantitas pedalis quadratica vel cubica num lineæ ſint, aut conſtituantur ex lineis: an-

Dial.5.p. 110.

non ſi quid horum ſtatueris audienti debebis ludibrium? Atqui non ſatis animadvertit clariſſimus vir, in uſu vocabuli menſuræ ſe multùm à ſua ipſius definitione recedere, eóque ſibi labendi occaſionem miniſtrare; quúmque toties lineam appellat menſuram temporis, & ponderis, & cujuſcunque quanti, nullatenus intelligere poteſt lineam eſſe partem aliquotam temporis, aut ponderis, aut motûs, aut corporis, neque cum iis lineam poſſe congruere; ſed laxiori menſuræ ſignificatu abutitur, juxta quem, ut antea diſtinctiùs expoſuimus, menſura ſubinde rem quamlibet deſignat, quæ poſſit aliam vel commode repræſentare, vel quomodocunque notificare. Quo duplice reſpectu linea (recta præſertim aut circularis ob ſimplicitatem & uniformitatem ſuam) temporis, ponderis, velocitatis, & cujuſvis quanti menſura dici poteſt & ſolet. Nam quia ratio quævis quantorum rectis lineis exprimi poteſt, ideo ſatis commodè rectæ lineæ eis repræſentandis adhibentur; ut v.g. pro duobus ſolidis, quorum unum ad alterum proportione ſic ſe habet, ut $\sqrt{2}$ ad 1, vel ut diameter quadrati ad latus, quando præter ipſarum proportionem nihil obvenit conſiderandum, ſubſtitui poſſunt duæ rectæ lineæ ipſarum rationem exhibentes; paríque ratione duorum temporum, vel duorum ponderum rationibus exhibendis aſſumi poſſent rectæ lineæ; & eatenus acceptione latiſſimâ quantorum iſtorum menſuræ dicantur hæ lineæ; quo ſenſu numeri ſunt menſuræ maximè communes & uſitatæ quantorum omnium commenſurabilium, eorum rationem exprimentes,

próque iis in ratiocinii decurſu ſubſtitutæ; quomodo etiam nedum lineæ, ſed alia quævis quanta aliorum quorumvis reſpectu menſuræ rationem ſubeant; ſicut enim quodcunque quantum rectâ lineâ pro arbitrio ſumptâ repræſentari poteſt, ita poſſit æquè ſuperficie quavis, poſſit corpore, poſſit literâ, charactere, nomine quolibet deſignari. Magis adhuc propriè, quamvis ab Hobbiana definitione ſatis remotè, menſuræ nomen obtinet recta linea (paríque jure quævis alia magnitudo poſſet obtinere) quatenus inſervire poteſt aliorum quantorum quantitati determinandæ ſeu declarandæ; quomodo longitudo lineæ, quam percurrit aliquid mobile deſignato tempore velocitatem indicat, adeóque metitur ejus; & arcus circularis anguli rectilinei cruribus interceptus anguli quantitatem arguit & oſtendit, hoc eſt, menſurat ſecundùm hanc acceptionem τὸ menſurare, quam nos fusè ſatis & ſuculentè pridem explicuimus. Hanc igitur ambiguitatem vocabuli menſuræ ſi perſpexiſſet is aut perpendiſſet, quocum agimus; aut ſi definitioni propriè conſtantius adhæſiſſet, non ita puto commiſcuiſſet omnium rerum quantitates, & inter ſe pronunciáſſet homogeneas, ejuſmodi ſcilicet argumento permotus. Quoniam linea eſt menſura temporis, erit quantitas temporis quantitati lineæ homogenea. Atqui reſpondeo, linea dici poteſt menſura temporis, ſumendo menſuram pro ſymbolo, vel argumento, vel indicio quantitatis quam habet tempus; at ſumendo menſuram juxta ſuam ipſius definitionem pro parte aliquota, ſatis liquet, nec ipſe diffitetur, *Pag.* 77.

tetur, lineam non esse mensuram temporis, adeóque juxta suam etiam homogenei definitionem, lineæ quantitas non erit temporis quantitati homogenea. Imò eodem ratiocinio quo probatum it temporis & lineæ quantitates homogeneas esse, atquè concluditur easdem esse heterogeneas. Quia nempe quantitas temporis per superficiem parallelogrammam aut corpus cylindricum mensurari (hoc est, per ea designari potest, & declarari vel notificari) & linea nequit superficiei parallelogrammæ nec corpori cylindrico congruere, erit juxta definitionem τ ἑτερογενείας ab ipso traditam, quantitati lineæ heterogenea. Quinetiam omnes omnino quantitates simul homogeneæ
Pag. 47. sunt & heterogeneæ : nàm, *Homogenea sunt* (ait) *quæ eodem genere mensuræ mensurabilia* ; ergo cùm omnes quantitates lineis mensurabiles sint, erunt omnes homogeneæ. *Heterogeneæ verò sunt* (ut idem ipse nos docet) *quæ diverso genere mensuræ mensurantur* : ergo heterogeneæ sunt omnes quantitates, quoniam omnes lineis, superficiebus, solidis angulis, (numeris pleræque rationalibus aut surdis) mensurari possunt, eo nempe modo quo mensuram accipit ipse, dum suos struit paralogismos. Et sanè cuncta ejus huc spectantia ratiocinia laborare videntur hâc unà τ ἀμφιβολίας fallaciâ : etenim revera quæ eodem genere mensuræ determinantur homogenea sunt, sumendo mensuram pro parte, vel aliquo congruo rei mensuratæ ; sed non semper homogenea sunt, quæ eodem genere mensuræ mensurantur, sumendo mensuram pro signo vel argumento ; ita certè nulla fo-

ret

ret quantorum heterogeneitas, & facilè confecta res eſſet. Cæterùm ex his angustiis eluctari ſe poſſe ſperat, rerum quantitates ab ipſis quantis perquam ſubtiliter diſtinguendo. *Quantitas* (inquit in Abſtracto) *cujuſcunque rei quantitati in abſtracto cujuſlibet alterius rei homogenea eſt, ideóque linearum, ſuperficierum, ſolidorum, temporis, motûs, vis, ponderis, roboris, reſiſtentiæ quantitates ſunt homogeneæ, etſi res ipſæ ſunt heterogeneæ.* Rurſus, *Video jam quanquam abſurdum ſit lineam dicere tempori æqualem eſſe, non tamen abſurdè dici quantitatem lineæ æqualem eſſe temporis quantitati.* Alibíque paſſim hoc inculcat mirificum commentum. Quo tamen nil efficit; verba tantùm dat nobis, aut potiùs ſibi. Quòd enim per quantitatem iſtam abſtractam ab ipſis linea & tempore diſtincti nihil animo concipiat ipſe, quovis auſim pignore cum illo contendere. Quid eſt, obteſtor, quantitas lineæ, præter ipſius lineæ ſingularem & determinatam magnitudinem, vel ipſa linea quà ſic determinata? Quid quantitas temporis, niſi definita ſui generis extenſio, vel ipſum tempus quatenus taliter extenſum? Ergo ſi linea & tempus heterogenea ſunt, etiam ipſorum quantitates heterogeneæ erunt. Tempus & lineam eſſe res heterogeneas, non ſolùm ut res phyſicas, ſed ut Mathematicæ contemplationi ſubditas, rei nimiâ coactus evidentiâ vix diffitetur ipſe; at quomodo? non utique ceu calida vel frigida, nigra vel alba, ſed ut quanta; nec enim aliter ea conſiderat Mathematicus. Quamobrem? quia nullam habent σχέσιν, non comparari queunt inter ſe κατὰ πηλικότητα (nos

Dial. 3. *p.* 81.

Pag. 77.

(nos ut veridicus docet Euclides) quia ſcilicet non eodem modo quanta ſunt, at diverſi generis quantitatem habent; vel quia ſine magna dici nequit abſurditate, tantum eſt tempus quantum eſt linea, tantus eſt annus quantum eſt ſtadium. Ergo quantitates temporis & lineæ ſunt diverſi generis. Verùm reponit, quantitas temporis à linea menſuratur: ita dico rurſus, æquivocè ſumendo vocabulum menſurare; nempe non menſurat ut pars iſtius quantitas, aſt duntaxat ut ſignum cauſale vel conſequens; ex quo nihil in ejus rem concludatur. Addo, nec admodum propriè quantitatem temporis menſurari, ſed ipſum potiùs tempus ut quantum menſuratur, vel quoad quantitatem; ſicut non tam videtur albedo, quàm corpus quatenus album, ſeu propter albedinem, hoc eſt, quia taliter diſponitur, ut tali modo viſum afficiat. Unde nec juxta definitionem ejus, Homogenea ſunt quorum menſuræ congruunt, quantitates abſtractè ſumptæ ſunt homogeneitatis bene capaces; quia non ipſæ menſurantur, at concreta potiùs quanta propter aut quoad ipſas; & ſanè propter ipſas etiam homogenea ſunt, aut heterogenea Mathematicè. Verùm adhuc inſtat, temporum rationes rectè comparantur cum linearum rationibus; dicitur enim, Ut ſe habet annus ad biennium, ita linea pedalis ad bipedalem; quidni igitur quantitas temporis cum lineæ quantitate conferatur? At quàm immanis eſt ἀβλεψία ejuſmodi ratiociniis, cum plurium rationum ſimilibus rationibus abſolutas ſimplicium quantitates confundere? Ex eo nimirum quòd ovum ſe habet ad duo ova,

ſicut

ſicut angelus ad duos angelos; vel quòd unius ovi ad duo ova talis ſit relatio, qualis unius angeli ad duos angelos, quomodo inferatur ullo modo ovi & angeli ſimiles eſſe, vel homogeneas quantitates? vel quòd quantitatibus ovi & angeli eadem menſura congruat? vel quòd angelus ullam omnino poſſideat abſolutam quantitatem? At hujus & præcedentis inſtantiæ nulla prorſus eſt diſparitas. Non ovum ovo, quod aiunt, ſimilius. Ita ſcilicet uſu venire ſolet, ut qui ſuos errores extenuare vel defendere malunt, quàm ingenuè confiteri, nedum non declinant eos, at plures ſæpiùs, eóſque prioribus deteriores accumulent. Sed excidit mihi verſus ritè adagialis,

Μὴ κινεῖν καμαρίναν, ἀκίνητος γὰρ ἀμείνων.

Maneat autem quoniam temporis quantitas (annua ſcilicet, menſtrua, diurna) cum lineæ longitudine (pedali, cubitali, ſtadiali) ſecundùm æqualitatem aut inæqualitatem, exceſſum aut defectum, additionem vel ſubductionem nequit appoſitè comparari, illa penitus eſſe homogenea; neque non eodem modo affecta reliqua quanta, nec à Mathematicorum hac in parte communi ſententia atque ſermone diſcedendum eſſe. Quòd ſi hæc vocabula nonnunquam aliter occurrant uſurpata, ut ſi quis propter naturæ ſubalternam quandam diverſitatem, lineas curvas rectis, aut ſuperficies gibbas planis heterogeneas dicat; quomodo Ramus angulos rectos rectilineos obliquis rectilineis heterogeneos dicit (paríque ferè de cauſa potuiſſet quadrantem peripheriæ circularis ſextanti, lineam pedalem ſemipedali heterogeneas

ap-

Ant. Farbius.

appellare); aut si propter convenientiam aliquam peculiarem genere disjuncta quanta vocentur homogenea; quomodo recens quidam Geometra, alioqui non ineruditus, parallelogrammum & cylindrum homogeneas figuras appellitat; eò quòd in hoc lineæ rectæ basi parallelæ simili tenore procedunt, quo circuli paralleli in illo; quod is vocat per elementa proportionalia procedere. Tales (inquam) καινοφωνίας & peregrinas vocum novitates limpidissimis hisce scientiis caliginem & confusionem inducentes cavere præstat & respuere; multóque satius esset exprimendis sensibus nostris nova vocabula confringere, quàm veteribus usu sancitis abuti. Sed manum de hac tabula. Cogitâram his de quantorum ὁμογενείᾳ & ἑτερογενείᾳ disputatis circa ipsorum ὁμοειδείαν & ἑτεροειδείαν (similitudinem & dissimilitudinem) quædam subjungere. Sed cùm currentis impetu calami præstitutas etiamnum temporis metas fuerim prætervectus, sufficiat ita jam ad illas, quæ cùm opportuna se præbuerit occasio, proximè consequentur de quantorum analogia disquisitiones utcunque viam muniviſſe. Vos interim bene valeatis precor, optimi & humanissimi auditores.

LECT.

LECT. II.

PRo more meo, posthabitis procœmiis, & ambagibus omnino prætermissis (postquam tamen vobis, auditores optimi quotquot estis, omnimodam salutem & gratulatus fuero præsentem, & diu futuram exoptavero) ad rem me confero protinus; & diutiùs intermissum pensum in manus resumo. Liceat autem bona vestra cum venia pridem institutæ methodo inhærere, quódque reliquum est susceptæ circa Matheseôs ἀπορυγόμενα tractationis detexere; quæ quidem spero fore cum hoc termino ut penitus absolvatur, quódque postquam tamdiu circa littus hæsimus, & horam quasi scientiarum oras legimus, in altum tandem æquor provehemur. Quanquam revera quas modò discutiendas aggredimur materiæ, sive subtilitas ipsarum, sive spectetur utilitas, vix illæ multùm abesse videntur ab intima profundissimáque Matheſi. Veniunt siquidem imprimis considerandæ ratio vel proportio, tum analogica seu proportionalitas; circa quas nimirum aliquatenus universa Mathesis occupatur, vel ut objecta sua, vel ut instrumenta inveniendi ac demonstrandi; nec analogiam proinde immeritò vir divinus in opere divinissimo (Timæum intelligo) censuit, δεσμὸν καὶ συνοχὴν τῶν μαθημάτων (vinculum & commissuram Mathematum, an disciplinarum potiùs omnium). Nec inde abit illa-

Theon Smyr. p. 131. *Plato Tim. p.*1048.

illustrissimus author præclaræ de methodo utendi ratione diatribæ: *Quia* (ait) *animadvertebam illas* (particulares nempe scientias quæ Mathematicæ dicuntur) *etiamsi circa diversa objecta versarentur, in hoc tamen omnes convenire, quod nihil aliud quàm relationes sive proportiones quasdam, quæ in iis reperiuntur, examinent, has proportiones solas mihi esse considerandas putavi* Addo Eratosthenem pronunciantem, Πάντα τὰ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐξ ἀναλογίας ποσῶν τινῶν συγκεῖσθαι. Adeo proportionum consideratio disciplinas hasce pervadit, & quodammodo complectitur universas. Non igitur ipsarum videri debemus tam extimam cutem lambere, quàm medullam intimam degustare, dum proportionum naturam contemplamur. Succedet huic θεωρία de magnitudinum situ vel positione determinata, quâ, simul cum ipsarum proportione, figurarum varia simimilitudo constat, & multifaria diversitas; tum de consequentibus has magnitudinum speciebus, seu convenientiis ac differentiis specificis; dein de motu quo progenerantur magnitudines: de his (inquam) succedet dispicere. Ita postquam pleraque, præcipua saltem, omnia magnitudinum symptomata, quæ Mathematicis quidem substernuntur, aut implicantur hypothesibus, utcunque perlustravimus, in eam, à qua primitùs digressi sumus, orbitam revertentes, de hypothesibus ipsis & reliquis principiis particularia quædam, quæ se suggesserint observatu digna, licebit in medium producere. Quibus defuncti negotiis ad id quod, ni malè memini, jam olim polliciti sumus conferemus operam, ut Mathematicæ sci-

Pag. 18.

Theon. cap.

ſcilicet inventionis modum exponamus. Erit autem quòd gratulemur nobis, ſi propoſitum hoc ſtadium hujus intra termini decurſum emetiri, vel utcunque ex animi ſententia conficere poterimus. His in anteceſſum prælibatis ad rationem ſeu proportionem excutiendam accedamus. Rationem & proportionem quod attinet (hæc enim nomina jam apud pleroſque Latine ſcribentes ἰσοδύναμα ſunt) eam Græci deſignant vocabulo λόγος, quo certè vix ullum ſuccurrit in iſta lingua magis anceps & πολύσημον. Significatus ejus quàm plurimos recenſere non abs re putavit Theon Smyrnæus expoſitione eorum quæ ad Platonis lectionem neceſſaria ſunt. Ego verò nimium philologus, & ἔξω λόγου, hoc eſt, extra propoſitum viderer evagari, ſi vel exſcribens eum vel imitans (quod in promptu foret eò connitenti) percenſere pleroſque ſtuderem & exemplis confirmare. Nemini non notum eſt, quòd vocabulum, λόγος communiter utcunque ſermonem mentis ἐνδιάθετον, & oris προφορικὸν (ita recentiores diſtinguunt Peripatetici) ſermonis, inquam, utriuſque, tum conceptivi tum prolatitii, tam facultatem operatricem quàm operationes ipſas, nec non immediatos effectus ab eo manantes denotet ac exprimat, præſertim quicquid horum cum diſcurſu jungitur ad hominis naturam appropriato, qui ſolus inter animantia cenſetur ζῶον λογικὸν, animal ſermocinativum vel diſcurſivum. Neque magis quenquam fugit literis mediocriter imbutum, quòd peculiari quadam ratione paſſim apud Græcos authores nedum ſententiæ ſingulares mente conceptæ vel

Cap. 18.

ore prolatæ, ſed plurium ſententiarum farragines & ſyſtemata diverſimoda ; fabulæ nempe vel apologi (hoc eſt, ſermones ex arbitrio & ingenio conficti) nugæ & offuciæ (hoc eſt, mera verba, ſenſûs vacua vel veritatis) adagia, ſeu jactatæ vulgò ſententiæ ; rumores famâ vel populari ſermone diſperſi, hiſtoriæ omnimodæ, orationes jugi ſerie pertentæ ; demum quælibet literæ λόγοι dicantur. Exempla præſtò ſunt, quibus hos uſu tritos hujus vocabuli ſignificatus firmem, aſt illos lubens prætereo. Neſcio tamen an operæ ſit alias quaſdam, quas etiam in popularibus obtinet ſcriptis acceptiones, ad rem noſtram & ſenſum Geometricum propiùs accedentes paucis perſtringere. Tales ſunt quum λόγος deſignat taxationem & comparationem quamcunque rerum inter ſe, prout iſtis in phraſibus uſitatis, Ἀποδιδόναι λόγον, συναίρειν λόγον, ὑπέχειν λόγον. Exempla dant etiam Sacræ Literæ ; S. Lucas, Ἀπόδος λόγον τῆς οἰκονομίας σου. S. Matthæus, Ἔρχεται ὁ κύριος τῶν δούλων ἐκείνων καὶ συναίρει μετ' αὐτῶν λόγον. Ἀποδιδόναι λόγον, rationem reddere ; συναίρειν λόγον, rationem inire : nempe muneris adminiſtrati, vel rei cujuſvis concreditæ ; quod nihil eſt aliud quàm actiones cum regulis ad quas exigendæ ſunt, ex præſcripto ſuperioris poteſtatis, vel ſummas rerum exhibitas cum iis quæ jure debentur, aut meritò expectantur comparare. Item cùm λόγος rerum valorem, pretium, meritum innuit, quomodo dici ſolet ἐν οὐδενὶ λόγῳ πίπτειν ; quod negligitur, poſthabetur, vilipenditur, —οὐδ' ἐν λόγῳ, οὐδ' ἐν ἀριθμῷ, quod in nulla ratione, nullo nu-

Luc. XVI. 2
Matth. XXV. 19.

numero est, hoc est, instar nihili habetur, in cēnsum non venit, neutiquam computatur. Sophocles,

Οὐκ ἂν πριαίμην ἀνδρὸς λόγου βροτόν,
Ὅστις κενᾶσιν ἐλπίσιν θερμαίνεται.

Non cassà nuce hominem emptitem, qui vana spe fervet. Ἐν λόγῳ θεὸς ποιεῖσθαι, dixit nonnunquam pro Deos venerari; & λόγον δικαίου ποιεῖσθαι Demosthenicum est, pro justitiam respicere vel suspicere, non pro nihilo ducere. Addo Galenum, Ἐπὶ πάντων τῶν ζητουμένων εἰς λόγον χρὴ μεταλαμβάνεσθαι τὸ νόημα, in omni disquisitione nomen ipsum in considerationem assumi debet. *De Meth. Med. l. 5.* Scilicet in hujusmodi locutionibus λόγος aliquam rerum magnitudinem, vim, potentiam calculo vel æstimio subjectam signat. Parumque videtur hinc abludere quod λόγος subinde pro causa rei vel conditione ponitur, hoc est, pro eo quod considerari debet & requiritur, ut aliquid fiat. Plato epist. 7. ad Dionis, Οἰκεῖος, ἦξειν (inquit) ὡμολόγησα ἐπὶ τούτοις τοῖς λόγοις, his conditionibus huc me venturum promisi. Δέχεσθαι λόγον, usitatur à Demosthene pro causam agnoscere, vel conditionem accipere. Εἰς λόγον ἀρετῆς, propter virtutem affici præmio, vel laude decorari. Et εἰς λόγον κακίας, pro vitio, luere pœnas, vituperio defamari, sunt oratoribus Græcis in usu loquendi formulæ: propter virtutem & vitium, hoc est, ex virtute vel vitio consideratis, juxta moralium præceptorum normas examinatis. Eò tantùm hæc attuli quò constaret à Geometris adhibitum hujusce vocabuli sensum haud ita longè recedere ab usu scriptores apud alios recepto

satísque pervulgato; nec abhorrere nostram à communi more loquendi consuetudinem. Idem ostendi poterat de Latina voce ratio, quæ Græcam λόγον exprimere solet, & suos ab illo pleroísque significatus mutuari: sed rei nimia claritas facit (& quia nimium jam hujusmodi parergis datum est) ut illi parcam operæ. Addam solùm, inde videri λόγον ejusmodi sensus, cùm istos extraneos tum peculiarem Geometris sensum desumpsisse, quòd diversas res inter se comparando dicitur, effertur, exprimitur ipsarum determinatus valor, aut quantitas, ex respectu quem una res obtinet ad aliam. Ratio autem ducitur à ratus, hoc est, à reor, idem designanto quod puto vel existimo; rerúmque proinde censum aut æstimium indicat ex comparatione notificatum. Quomodo etiam verbum putare, deductáque ab illo computare, supputare, denotat numerando vel utcunque res conferendo quantæ sunt (magnitudine vel pretio quantæ) æstimare: quod & Græcis dicitur λογίζεσθαι. Vox autem proportio reperitur à Cicerone aliquoties usurpata, quanquam sensu non uno exactè eodem. Aliàs enim apud ipsum idem valere videtur quòd simplex ratio, nonnunquam verò rationum similitudinem vel analogiam designare: primúsque videtur ille ipse ejus usum adinvenisse, saltem ad res Mathematicas primus applicuisse. Sic innuit in fragmento quod Timæus inscribitur, vel de universo: verba sunt, * *Sed vinculorum id est aptissimum atque pulcherrimum, quod ex se atque de bis quæ*

* Δεσμῶν δ' ὁ καλλιστος, ὃς ἂν αὑτὸν καὶ τὰ ξυνδούμενα ὅτι μάλιστα ἓν ποιῇ. Τοῦτο δὲ πέφυκε ἀναλογία μάλιστα ἀπεργάζεσθαι.

quæ astringit, quàm maximè unum efficit. Id optimè assequitur quæ Græcis ἀναλογία, Latinè (audendum est enim, quoniam hæc primùm à nobis novantur) *comparatio, proportióve dici potest. Porro sæpiùs in isto libello proportionis utitur vocabulo, sensu tamen, ut videri prænonitum, aliquà vario.* Ejus autem effingendæ hinc accepta videtur origo vel occasio. Cùm in corrogandis vectigalibus, & importandis oneribus publicis, pro facultatum modo secundùm æquas leges taxato, suà cuique pars persolvenda cesserit, quæ nempe rata cujusque portio dicta est; hinc unusquisque solvere dictus pro portione, vel pro rata suà portione; hinc emersit vocabulum proportio, dignum visum Ciceroni, quum Græcas literas suo donare Latio studeret, quod λόγον & ἀναλογίαν, obvias Platonem & alios Græcos Philosophos inspectanti voces, referret & exprimeret. Sed manum ferulæ subducamus, & Grammaticorum egressi scholis videamus quid per λόγον eique respondentem rationem, & proportionem (juxta frequentiorem & probatiorem usum proportionis, nonnunquam enim analogiam significat, hoc est, proportionalitatem) intelligant ipsi Geometræ, quæque sit hujus adeò triti vocabuli genuina notio disquiramus. Permirum siquidem videatur ejusce de rei, quæ paginam ferè replet utramque, nusquámque non occurrit in Matheſi, naturæ viros inter Matheseôs haud in postremis peritos acriter disceptari. Quasi nesciri possit res tam obvia, toties jactata, adeò diligenter excussa. Unde proveniat hoc? Inde opinor, quòd perdifficile sit res admodum abstractas

& universales, præsertímque modos & relationes rerum, vel imaginari distinctè vel accurate definire. Ferè neminem arbitror fore, saltem e gnaris Mathematum, qui non utcunque quantúmque satis est intelligat, quid velit ipse dum profert hoc vocabulum, quídque concipiant alii proferentes ipsum; sed non ita forsan in promptu est ei respondentem conceptum mentis, proprium vel alienum, aliis verbis explicare, hoc est, ipsum definire. Hinc litigandi causâ non secus in hac quàm in aliis pleriſque consimilibus materiis, à sensu disjunctis: subnotavit hoc Cartesius, & inde vitio vertit Philosophis morosam illam verba definiendi curiositatem, istis verbis; *Non hîc explico multa nomina, quibus jam usus sum vel utar in sequentibus, quia per se satis nota videntur. Et sæpè adverti Philosophos in hoc errare, quòd ea quæ simplicissima erant, ac per se nota Logicis definitionibus explicare conarentur; ita enim ipsa obscuriora reddebant.* Princ.I.10. Quæ subtilissimi viri observatio vel inde validissimè confirmatur, quòd circa definitiones istas rarò convenit inter illos, qui saltem nulli sectæ nomen suum addixerunt; at quam unus probat, alter respuit, & vel minùs aptam, aut non satis accuratam judicat definitionem. Ut & exinde quòd illorum abstractissimorum nominum definitiones rarò vel nunquam demonstrationes ingrediantur; nec inserviant (qui tamen primarius definitionum usus est & scopus) conclusionibus eliciendis; instantiæ causâ, jam obiter, sed opportunè, adnoto definitionem σὺν λόγῳ traditam in elementis, nusquam in toto elementorum systemate, nec alibi (quòd sciam

am, imò diſtrictè aio non alibi) quovis in libro Mathematico citatur aſtruendæ ulli demonſtrationi, vel concluſioni deducendæ. Suppeditet alterum exemplum vox διάστημα veteres apud Muſicos, quod ex iis nemo non definit, at verbis diſcrepantes, & ſenſu non-nihil varii à ſe omnes : apparebit id Ariſtoxenum, Euclidem, Nicomachum, Bacchium, Ariſtidem, Gaudentium, Capellam, ſi cui ad Inbitum erit, inſpectanti. Sed rem adoriamur propiùs. Adnotanda verò primùm occurrit ambiguitas, vel diſtinctio quædam, cui ſubjacent vocabula ratio & proportio, etiam prout illa uſurpantur à Mathematicis ; Latinorum (inquam) vocabulorum, nam Græcum λόγος, ut exiſtimo, non agnoſcit iſtam homonymiam. Duplex igitur à quibuſdam ſtatuitur ratio vel duplex proportio, uni nomen indunt Arithmeticæ, alteri Geometricæ rationis vel proportionis. Quibus explicandis prænotetur imprimis rationem utramque, quæ dicitur cùm duorum homogeneorum quantorum comparationem innuat qualemcunque, ad claſſem iſtam ſeu categoriam entium ſpectare, quæ τὰ πρός τι Ariſtoteles, alii relationes vel habitudines, Græci σχέσεις indigitârunt. Quorum duorum quantorum ſeu terminorum (terminum enim vocant Mathematici horum correlatorum quantorum utrumvis : "Ορος (inquit Theon Smyrnæus) ὁ τὸ καθ' ἕκαστον ἀποφαίνων ἰδιώμα τ λεγομένων, οἷον ἀριθμὸς, μέγεθος, δύναμις, ὄγκος, βάρος. Terminus eſt qui peculiarem dictorum naturam, ſeu proprietatem exprimit, ut numerus, magnitudo, moles, pondus. Et alibi clarius,

Cap. XX. rius, Ὅροι δὲ λέγονται τὰ ὁμογενῆ, ἃ ὁμοίως ἢ λαμβανόμενα εἰς σύγκρισιν. Terminos dicimus quæ cùm genere vel ſpecie conveniant, in comparationem aſſumuntur. Horum (inquam) duorum terminorum in comparatione prior appellari conſuevit ἡγούμενος antecedens, ei verò correlatus poſterior ἑπόμενος conſequens. Hoc præmiſſo, Arithmeticam rationem ſeu proportionem, appellant nonnulli duorū quantorum, Τὴν κατὰ τὸ ὑπερέχον καὶ ἐλλείπειν γένεσιν (verba ſunt Scholiaſtæ veteris à Meibomio citati) relationem ſecundùm differentiam, quatenus unum excedit alterum, vel deficit ab altero (poſſit adjici κατὰ τὸ ἰσάκις, adæquari, ſibi vel nihilo differre; nam & inter æqualia quanta poteſt inſtitui comparatio, poteſtque ſingularis hæc ipſorum relatio denotari per τὸ differre nihilo, quod inter exceſſum & defectum medius interjicitur limes). Per differentiam autem hîc intelligimus ipſum τὸ διαφέρον, ſingulari modo comparari vel referri hoc ad illud, non abſolutum id quantum, quod poſt unius ab altero ſubductionem eſt reſiduum, quod quidem διαφορὰ & differentia plerunque dicitur. E.g. relatio quæ verſatur inter lineam tripedalem & lineam bipedalem, juxta quam illa ſuperare concipitur hanc lineâ pedali; vel inversè, relatio bipedalis ad tripedalem, quatenus illa concipitur ab hac deficere quantitate lineæ pedalis, appellantur rationes Arithmeticæ, illa exceſſûs, hæc defectûs; ipſa verò pedalis linea, abſoluta magnitudo, quamvis differentiæ nomine venire ſolet, attamen ratio non eſt; ſed hæc excedere vel deficere ratio dicitur Arithmetica. Hanc talem

talem (aio) quantorum habitudinem ad se invicem nonnulli rationis Arithmeticæ donant appellamento. (Cur Arithmeticam dixerint non jam disputabo, res quippe controversa est; tantùm inde sic denominatam videri dicam, quòd analogiam quandam veteres Arithmeticam appellârint, qua de causa tum dispiciendi locus erit, cùm de analogiis agemus). Verùm apud Græcos nusquam reperio λόγον aliquem Arithmeticum; semper ii quantorum λόγον contra distinguunt ab ipsorum differentia, quæ significant vocabulis διαφορὰ & ὑπεροχὴ. nec rarò διάστημα nuncupant (intervallum, spatium, distantiam, non ex positione locali resultantem innuentes intercapedinem, aut diversitatem & quasi distantiam in quantitate, per quam unum abest ut alteri sit æquale; determinatam quandam ab æqualitate remotionem) per λόγον autem (ut opinor) perpetuò designant illam quantorum σχέσιν, quæ dici solet ratio Geometrica, vel ratio simpliciter. Apud omnes enim cùm ratio ponitur ἁπλοῦς, & ab epitheto libera, ratio intelligitur Geometrica, hoc est, ea σχέσις juxta quam unum quantum alterius totuplum vel quasi totuplum concipitur (ita continere aliud, vel ita contineri in alio, sicut numerus iste continet alium, vel continetur in alio; vel saltem sicut expositorum duorum quantorum illud continet hoc, vel continetur in hoc) quo pacto v.g. relatio lineæ tripedalis ad bipedalem, juxta quam illa semel hanc, & ejus insuper semissem concipitur includere; vel ad hanc se habere, sicut numerus ternarius ad binarium, dicitur ratio Geometrica, vel ratio

tio (ſimpliciter) ſeſquialtera: inverſéque relatio lineæ bipedalis ad tripedalem, juxta quam illa duas hujus partes efficit tertias, vel ſe habet ad hanc ſicut numerus binarius ad ternarium, dicitur ratio ſeſquialtera. E quibus utcunque liquere poteſt, quantum interſit diſcriminis inter haſce duas relationes, Arithmeticam & Geometricam, quas appellitant. Valde differunt enim aliud hoc vel illo excedere, & aliud toties (vel quaſi toties, id addo certa de cauſa poſthac inſinuanda) continere; hoc vel illo deficere, & toties ab alio comprehendi. Vulgò explicatur hoc diſcrimen haud malè ex modo, quo inveſtigantur & innoteſcunt hæ relationes, tum ſaltem quum termini comparati numeris exprimuntur (exceptionem hanc oppono, quia video propter illum neglectum rationum doctrinam aut perperam aut obſcurè tradi) ſed ponamus terminos inter ſe collatos numeris exprimi; tum invenitur ipſorum Arithmetica ratio, ſubducendo terminum conſequentem ab antecedente; Geometrica verò dividendo terminum antecedentem per conſequentem (invenitur inquam, hoc eſt, indicatur, æſtimationi noſtræ ſubjicitur). E. g. comparando duo quanta numeris ternario & binario denominata, lineas puta tripedalem & bipedalem, ſubducendo binarium ex ternario relinquitur differentia unum, vel una pedalis linea. Sin tranſpoſitis terminis auferatur linea tripedalis ex bipedali remanet minus uno, vel defectus unius lineæ pedalis pro differentia; ex his verò reſiduis inclareſcunt relationes quoad differentiam, vel Arithmeticæ propoſitorum

ſitorum quantorum rationes; quatenus ſi inventum ab utravis ſubductione reſiduum addatur conſequenti, ſumma reſultans æquabitur antecedenti: nam in priori comparatione 1+2=3, in poſteriori —1+3=2. (Huc verò tendere videtur omnis quantorum σύγκρισις, ut ad æqualitatem, quæ præ reliquis maximè ſimplex, unicè permanens, facillimèque comprehenſibilis eſt relatio, redigantur aliæ, & utcunque per eam æſtimentur). Vocatur autem prior relatio ex priore differentia exceſsûs unius, altera defectûs unius, itidem ſcilicet ex differentia poſteriore. Jam verò ſi comparentur duo quanta, repræſentata numeris 20 & 4, dividendo antecedentem 20 per conſequentem 4, fit quotiens 5; ſed invertendo terminos, dividendóque 4 per 20, ſurgit quotiens $\frac{1}{5}=\frac{4}{20}$. Hiſce verò quotientibus declarantur rationes Geometricæ propoſitorum quantorum, quatenus ſi quotiens inventus per conſequentem multiplicetur, productus emergit æqualis antecedenti: nam in priori comparatione 5×4=20, in poſteriori verò $\frac{1}{5}$×20=4; quomodo res iterum ad æqualitatem revocatur. Denominatur autem prior relatio à quotiente invento ratio quintupla, poſterior ἀνυπερόγδοος ratio ſubquintupla, itidem à quotiente $\frac{1}{5}$. Aſt cauſa mihi jam reddenda videtur, quamobrem aliter quàm vulgò fit Arithmeticam rationem explicuerim, non ſubducendo minorem terminum à majore, ſed indifferenter conſequentem ex antecedente. Cauſam aſſignare licebit multiplicem: Primò, commodior eſt hic modus iſti, cui declarando inſiſtimus, diſcrimini rationum

num harum diversarum per subductionem & divisionem declarando. Quia secundum hunc modum subductio, qua indicatur ratio Arithmetica, per omnia respondet & quadrat divisioni, quâ ratio Geometrica declaratur. Nam juxta nos peragitur isthic duplex subductio, sicut hîc duplex divisio: subducitur isthuc terminus major à minore (quæ impropriè est subductio) sicut hîc dividitur minor terminus à majore (quæ impropria est divisio). Emergit isthuc residuum nihilo minus, sicut hîc quotiens unitate minor; illuc ex consequentis & relidui additione semper fit antecedens, planè sicut hîc ex consequentis & quotientis multiplicatione procreatur antecedens; ita pulchrè congruunt omnia: commodior igitur est hic modus altero, juxta quem fit tantùm una subductio, differentia tantùm est unimoda (semper intelligo positiva) seu major nihilo, nec reliqua quovis pacto bene consentiunt. Secundò, in se quoque verior est, & ipsissimæ rationi convenientior hic modus rationes Arithmeticas per subductionem explicandi. Quum enim comparando duo quanta inæqualia terminorum transpositio duplicem efficiat μόνην (non enim eodem modo refertur major terminus ad minorem, quo minor ad majorem) per unicam differentiam, minoris è majore subductione, acquisitam vel inventam, hæ duæ rationes non explicantur rectè & ex usu. Præstat eas duabus differentiis exprimere, alterâ positivâ excessum, alterâ negativâ defectum indicante. Non idem est discere quod excedere, non igitur eodem signo denotandi sunt excessus

&

& defectus. Hoc quum non observarent aliqui, nullam dari quoad διαφορὰν quantorum σχέσιν asseruerunt; quoniam si daretur aliqua, duplex esse debuerit; at differentia positiva simplex est & unica. Nicomachus in Enchiridio Harmonices, Κακῶς γὰρ οἴονται διαφορὰν καὶ σχέσιν τὸ αὐτὸ εἶναι· ἰδοὺ γὰρ τὰ δύο πρὸς τὸ ἓν διαφορὰν μὲν ἔχει τὴν αὐτὴν, ἣν ἓν πρὸς δύο, σχέσιν δὲ οὐ τὴν αὐτὴν· *Malè opinantur qui differentiam & relationem pro eodem habent: ecce enim duo ad unum differentiam habent eandem, quam unum ad duo, sed neutiquam eandem relationem.* Satis consequenter arguit ex unicæ differentiæ hypothesi; at enim respondeo quòd differentia inter 1 & 2 sit —1, significans 1 à 2 deficere uno; differentia verò inter 2 & 1 est +1, significans 2 superare 1 ipso 1. Quum igitur duplex sit differentia, nil obstat quin sint duæ relationes sibi quasi contrariæ vel universæ. (Malè igitur Theon ille Smyrnæus, Nicomacho consentiens, Τῶν δὲ ἀνίσων διάστημα μὲν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, ἐφ' ἑκατέρου ἑκάτερον· λόγος δὲ ἕτερος καὶ ἐναντίος ἑκατέρου πρὸς ἑκάτερον, & quæ sequuntur in eandem sententiam). Sanè vix percipio cur non æquè confundi debeant rationes Geometricæ, quæ inter duos terminos inæquales, ex terminorum intercedant Metathesi sic ut pro una ratione habeantur, æquè ac vulgò commiscentur, próque una censentur relationes secundùm διαφορὰν, quæ inter terminos itidem æquales versantur. Nec obstat quòd impropria sit hujusmodi subductio majoris à minore, quédque difficile videatur concipere quid ipso nihilominus. Nam haud ferè minùs impropria censeatur

Cap. 30.

tur divisio minoris per majus, neque facilius videatur concipere quoties majus à minore continetur. Satis est quòd hujusmodi subductio, pari modo ac istiusmodi divisio, exactè calculo paret, ac legibus subjacet Arithmeticis, & non sine ratione confingitur aut adhibetur. Adjici posset hunc subducendi modum, quoad alia valde utilem esse, præsertim in progressionum Geometricarum comparatione cum Arithmeticis; & imprimis illarum progressionum, quæ utrinque ab unitate procedunt hinc crescendo, illinc decrescendo; sicut enim crescentibus terminis exponentes assignantur positivi, ita decrescentibus commodissimè tribuuntur negativi. Sed hoc non est jam persuadendi locus. Moneo tantùm in Geometria facilè differentes hasce negativas, seu nihilo minores terminos exhiberi. Nam ab eodem fixo limite tantùm in partes statuuntur & computantur contrarias iis, in quas procurrunt termini positivi nihilo majores. Ut si in linea recta indefinitè extensa duæ rectæ AM, AN,

sumptæ utrinq; in partes contrarias, singulæ æquentur cuilibet rectæ Z, & recta AM anteriùs excurrens repræsentet +Z, tum AN retrorsum accepta repræsentabit —Z. Ut puta nantem ab A versus anteriora, sed adverso flumine brachiorum contentione progressurum ad M, sed fluminis impetu duplo valentiore retrò deportari. Igitur ab eo confectum iter erit AM—2AM vel —AM, ab A versus partes à tergo positas computanda, & pertingens ad N. At sufficiant hæc

hæc aliquatenus illuſtrando diſcrimini, quod inter rationes Arithmeticam & Geometricam intercedit, per ſubductionem & diviſionem. De eadem forſan re poſthac opportuniùs & accuratiùs diſſeremus, quum examinanda veniet eorum ſententia, qui rationum doctrinam numeris volunt alligari, & quæ iſti cohærent diſquiſitioni. Nunc unum ſolummodo vel alterum harum relationum diſcrimen attingemus, ex ipſorum natura petitum. Illud imprimis advertatur rationem Arithmeticam eandem unius tantùm generis terminis exhiberi, rationem verò Geometricam cujuſvis generis quantis bene repræſentari vel exprimi. Cauſa eſt, quia ratio Arithmetica determinatur per abſolutum quiddam intra certum genus conſtitutum, differentiam nempe quantorum duorum homogeneorum, quæ terminis ipſis ita comparatis ſemper homogenea exiſtit: ſed ratio Geometrica determinatur ex modo, quo res una continet aliam, vel continetur in alia, qui modus terminorum heterogeneorum conjugationibus variis æquè poteſt competere; unde fit ut quælibet duo quanta ſint apta nata quorumvis aliorum duorum quantorum ſimiliter affectorum relationes exprimere, vel menti æſtimandas ſubjicere. E g. ratio Arithmetica duarum linearum inæqualium ſolis duabus lineis (non duobus ponderibus, temporibus, corporibus) exhiberi poteſt, quia nulla linea pondere quovis aut tempore, vel corpore lineam alteram excedit, at aliquâ lineâ tantùm, eâque ſecundùm abſolutam ſuam quantitatem definitâ; ſed ratio Geometrica duarum earundem linearum exprimi

mi poteſt duobus ponderibus, duobus temporibus, aut aliis cujuſvis generis duobus quantis: ut nempe quæ pedem inter & unciam longitudinalem verſatur, ratio repræſentetur libra & uncia ponderibus, anno & menſe temporibus, aut aliis quibuſvis ſimilibus terminis, quorum unus alterum continet duodecies; quia ſcilicet harum conjugationum utut ſecundùm abſolutas ſuas quantitates invicem heterogenearum termini inter ſe collati eodem ſe modo reſpiciunt, versùs ſe conſimiliter affecti ſunt. Exhinc anſam cepit doctiſſimus vir dicendi, *Rationes omnes Geometricas quarumcunque ad invicem quantitatum eſſe inter ſe homogeneas, quippe in genere numeroſo omnes.* Adjungítque poſtea, *Ubi comparatio ſit quoad rationem, quæ emergit ratio comparatorum, genus non rarò deſerit, & tranſit in genus numeroſum, cujuſcunque ſint generis quæ comparantur.* Quæ tamen dicta minùs probo, cùm aliis de cauſis non jam exponendis, tum quia nullum ego vel rationum vel numerorum genus, ſub quantitate comprehenſum agnoſco; nec enim rationes ſunt meâ ſententiâ quantitates, nec quantitatis capaces (ut ſuo poſthac loco conabor evincere) ſed meræ relationes in quantitate fundatæ; numeros autem pro nominibus tantùm & ſymbolis habeo rerum quantarum, quod jam antea ſæpiùs expoſui & aſtruxi. Addo manifeſtum videri, quòd cùm duo quanta comparantur inter ſe (ut ſcilicet ipſorum ratio per artificioſas quaſlibet operationes Arithmeticas vel Geometricas inveſtigetur, hoc eſt, menti noſtræ comprehenſibilis & æſtimabilis reddatur) non tamen inde nova procuditur

D. Wallis Arithm. p. 226.

ditur aut emergit ratio, quàm eadem aliis terminis exhibetur; nec unquam ratio genus ſuum deſerit, ſed diverſi generis terminis, ſimplicioribus ut plurimùm & menti notioribus exhibetur; plerumque quidem (cùm id fieri poteſt) numeris, ideo quia hi ſymbola ſunt rerum menſuris ad noſtrum captum determinandis accomodatiſſima. Percontanti v.g. quam rationem in valore vel in pondere habet ſolidus ad drachmam, qui reſpondet, rationem habet numeri 12 ad 4, non aliam producit rationem, at quæſitam exponit terminis numericis; & qui porro quærit quæ ſit ratio numeri 12 ad 4, dividendóque antecedentem 12 per conſequentem 4, comperit hanc eſſe triplam, non is novam rationem educit aut enunciat, at propoſitam exprimit terminis faciliùs æſtimandis, hoc eſt, numeris, iiſque tandem minimis ternario ac unitate. Qui dicit enim illud hujus triplum eſſe, dicit æquipollenter, & illud vult intelligi illud ad hoc ſe habere ſicut 3 ad 1; antecedente ſcilicet expreſſo, ſed conſequente (qui ſemper in hujuſmodi rationum denominationibus eſt unitas) verbo tenus ſuppreſſo, re ſubintellecto. Hinc altera diverſitas harum rationum adnotari poteſt, quòd Geometrica ſemper duobus terminis, ſaltem quoad intellectum, exprimitur, iiſque ſemper poſitivis (nam etiam duorum negantium terminorum ratio poſitiva eſt, puta $\pi\delta$ —4 ad —2 eſt dupla, vel ut 2 ad 1, quod inde patet, quia multiplicando terminum utrumque per —1, producitur +4 & +2, habentes ſe ut 2 ad 1). Sed Arithmetica ratio tantùm uno termino exprimitur, eóque

nonnunquam negativo: ut talis ratio inter 1 & 3, commodiſſimè indicatur per negativum terminum —2, ut ſupra mox admonitum. Accedit quòd Arithmetica ratio reperitur inter duos terminos diverſis ſignis affectos; at inter tales nulla verſatur ratio Geometrica. E.g. ratio Arithmetica inter 2 & —2 eſt eadem rationi quæ inter 6 & 2; nam utrobique exceſſus antecedentis ſupra conſequentem eſt 4, at 2 ad —2 nullam Geometricam obtinet rationem; habet enim ſe ad illud, ſicut aliquid ad pluſquam infinitè parvum, nec ullus eſt cogitabilis numerus, utcunque magnus, qui non ſit minor reſpectu unius, quàm 2 reſpectu —2. Porro, æqualium ratio Geometrica ſemper denominatur unitate, ratio Arithmetica nihilo; majoris ad minus ratio Geometrica, numeris explicabilis, denominatur unitatem excedente numero, integro vel miſto. Pariter & ratio Arithmetica nihilum excedente differentiâ, (quæ tamen unitatem non ſemper attingit) minoris autem ad majus ratio Geometrica ſemper fractione vel numero, qui ſit unitate minor denominatur, at ratio Arithmetica talium terminorum ſignatur infra nihilum ſubſidente numero negationem involvente, ut antehac inculcavimus. At verò de harum rationum diſcrepantiis diximus pluſquam ſatis. Cùm igitur adeò naturâ diverſæ ſint hæ relationes, idem rationis nomen utrique non conveniet univocè quod aiunt; adeóque præſtat id vocabuli Geometricæ ſoli appropriatum relinqui. Nóſq; dimiſsâ jam iſtâ ἀκρίβειᾳ dictâ ad propiùs explorandam hujuſce Geometricæ rationis notionem accedamus. Aperuiſſe

ruisse viam ancipitiis præpeditam suffecerit τὰ νῦν. Ei proxima Lectione pressius insistemus; interim (auditores optimi) precor valeatis.

LECT. III.

PRæfationibus utcunque defuncti, discussisque quæ se objecerant ambiguitatum nebulis, ipsam Geometricæ rationis naturam jam aggredimur inquirendam & enodandam. Geometrica verò ratio, vel ratio simpliciter (hoc enim sensu deinceps perpetuò hoc vocabulum usurpavimus, ut & ei æquipollens proportio) ratio, inquam, vel proportio, ὁ λόγος definitur ab Euclide (vel ab Eudoxo si quidem is fuerit, ut perhibetur, elementi V compositor) Δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πολικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Circa quam definitionem duo quæri possunt & disceptari; primò quæ sit ejus genuina mens, tum an ipsa satis proba sit & accurata. Utrique disquisitioni satisfacere conabor, ad singulos ejus terminos quædam annotando, quò magistri nostri simul interpretatur sensus, & tueamur auctoritatem. (Ignoscite verò pugnacitati meæ, neque sequius accipite, quòd pietate quadam adductus immeritis undique criminationibus impetitum Geometriæ patrem & principem studeam vindicare). In omni imprimis definitione 1.
spectandum est, ut res definita ad certam entium classem restringatur; id enim ad

ejus naturam determinandam, & ab aliis ſecernendam, apprimè confert. Ergò primò genus inquiritur : hoc in hac definitione eſt χέσις, habitudo vel relatio; rectè quidem, nam quum omne quantum dupliciter conſiderari poſſit, vel ut certam quandam abſolutam ſui generis extenſionem (abſolutam, inquam, & ex intrinſeca naturæ ſuæ proprietate determinatam) habens, vel quatenus cum alio quanto collata certo versùs ipſum modo ſe habet ; cujus modi comprehenſio menti noſtræ deſerviat, ad quantitatem ejus abſolutam meliùs concipiendam, & aliis enunciandam ; certo modo, dixi, ſe habet, hoc eſt, ut vel ei penitus congruat & æquetur, vel inæquale ſit ratione quadam peculiari, quæ per numeros (hoc eſt, ſymbola quantorum in æquales partes diviſorum connotantia) vel per aliorum quantorum eodem modo ſe habentium expoſitionem, nobis utcunque nota reddatur & æſtimabilis. (Ignoſcite quæſo vos rem explicatu perdifficilem, & ſubtiſitate ſua mentis attentiſſimæ cogitationi illudentem, craſſiuſculè laboranti illuſtrare) hoc autem certo modo ſe habere versùs aliud, alteri ſic æquari, vel certa ratione quadam inæquale eſſe dicitur (ex inſtituto dicitur, conſenſuque magiſtrorum rebus in hac ſcientia conſideratis nomina præſcribentium) hanc vel illam ad alterum rationem habere ; & reſpectus ipſe talis abſtractè ſumptus ratio nuncupatur, quæ proinde meritò relationum claſſi ſeu categoriæ accenſetur : liquet enim ipſa quanta hoc pacto conſiderata fore τὰ πρός τι referri ad ſe mutuò, cuncta ſubire, quæ relatis & correla-

tis

tis assignant Logici; unde prima τῆ πρός τι desumpsit hinc exempla Philosophus, cùm in Metaphysicis tum in Logicis: Οἷον (inquit) τὸ μεῖζον τῶθ' ὅπερ ἔστιν ἑτέρῳ λέγεσθαι· πινὸς γὰρ μεῖζον λέγεται· καὶ τὸ διπλάσιον τῶθ' ὅπερ ἔστιν ἑτέρῳ λέγεσθαι· πινὸς γὰρ διπλάσιον. Nihilominus tamen hoc nomine mirificus ille Matheseos hodiernæ castigator noſtras, Euclidem sugillat inclementissimè & irreverentissimè. *Rationis*, inquit, *definitio* (hanc innuens Euclideam) *satis inepta.* Iterum, *Id quod Euclides insignificanter dixerat.* Adhuc, *Fieri potest ut Euclides non satis ipse perspexerit rationis naturam; imò fieri aliter non potest, cùm definierit rationem per ποιὰ χέσις.* Denuò censet Euclidem hoc loco tussiisse, hoc est, cùm nihil haberet quod ad rem diceret, sonum mentis vacuum edidisse. Sed bona verba; quæ causa tam tragicè sæviendi? quia scilicet ὁ στοιχειώσης rationem per χέσιν definivit; χέσις autem quod tu capere potes, aut vis nihil significat: quid facias hoc homine? ipse rationem, teste seipso ac judice, verè sicut omnia & accuratè definit, hoc modo, *Ratio est relatio antecedentis ad consequens secundùm magnitudinem.* Ratio est relatio, quid aliud cogitavit aut voluit Euclides? quis ejus unquam mentem aliter cepit? Sed pro jure suo vult hic ordinis Dictatorii vir non tantùm ipse loqui, sed alios loquentes intelligere suum ad modum & arbitrium; adsumit sibi (quis enim prohibeat?) vocabulorum peritissimus faber, animi sui sensum præter morem efferre, sed nec eo contentus adrogat sibi potestatem, alienas quoque sententias contra commune suffragium & receptissi-

Pag. 44, 100, 88, 82.

Pag. 45.

mum usum interpretandi. Σχέσις, quando sic ipse jubet & statuit, habitudinem significare debet; habitudo verò nihil, quicquid alii plerique reclament mortales, ista vocabula certos ad sensus suos designandos adhibentes. Grammatici congruentiam istam seu connexionem inter substantivum & adjectivum, nomina intercedentem σχέσιν ὀνομάτων vocant. Theologi disputant an imagines sint adorandæ σχετικῶς, hoc est, propter σχέσιν seu relationem quam obtinent ad prototypa quæ repræsentant. Illas quæ cognatos & affines versantur relationes, ex naturæ conjunctione vel mutuis pactionibus oriundas, communis sermo σχέσεων designat appellamento. Plaustra liceret exemplorum invehere; sufficiat probatissimi unius Grammatici luculentum testimonium: Ἡ σχέσις (inquit Suidas) ἐπὶ τῶν πρός τι λέγεται, οἷον πρὸς πατέρα υἱὸς, πρὸς φίλον φίλος· ταῦτα γὰρ καὶ ἔχει καὶ ἔχεται ἀπ' ἀλλήλων, διὸ καὶ σχέσεις προσείρηται· πρὸς δέ τι εἰσὶν καὶ τὰ κατὰ σύγκρισιν λεγόμενα, οἷον μικρὸν, μεῖζον, διπλάσιον, καὶ ἐπιστήμη, καὶ αἴσθησις. Non igitur vocabulum σχέσις prorsus insignificans & sensûs expers est, at certè quiddam aptè satis notat, nec aliud planè quàm ipsam relationem. *Sed*

Pag. 45. *quæro* (inquit adversarius) *quid est quod hoc loco habet, quid quod habetur? Et an ratio dicatur habitudo, ab eo quòd ipsa habet aliquid, vel ab eo quod habetur? Et siquidem habet quid sit quod habet, sin habeatur a quo habetur. Quæ omnia sunt inepta.* Ad quæ regero, quum ab ipso ratio dicitur relatio, sciscitor & ego quòd sit isthic quod fertur aut refertur, unde vel quò fertur; qui motus isthic inter terminos duos com-

comparatos reciprocatur. Scilicet revera non vacat ineptiâ vocabulorum vires & significatus strictâ severâque lege solis ex etymis colligere vel adstruere, qui potiùs ab utentium consuetudine consensúque, cui suam unicè significandi vim ac potestatem debent, accipiendi sunt & approbandi. Quanquam cùm τὸ ἔχειν innumeris modis usurpetur, nihil usitatius sit Philosophis, quàm eo relationem & respectum τῶν πρός τι denotare. Aristoteles in Categoriis, Ἔστι δὲ τὸ ἔχειν τοῖς πρός τι ταυτὸν τῷ πρός τι πῶς ἔχειν. Relationum essentia consistit in hoc, quòd ad aliquid se certo modo habeant, vel quodammodo sint affecta. Illud autem habere fundamentum innuit verum & reale quod habetur & reperitur in terminis singuiæ cujusque relationis, propter quod vel secundùm quod se mutuò respiciunt. Habetur v.g. (quò pleniùs respondeatur adversario) determinata quantitas in terminis cujuscunque proportionis, propter aut juxta quam una comparatur cum alia; unde forma loquendi frequentata Geometris, nec ab ipso non animadversa, quæ rationum similitudines explicantur per ὡς ἔχει, οὕτως ἔχει· Ut se habet A ad B, ita se habet C ad D. Non igitur delirat Euclides (is cui tot seculorum communi voce toties acclamatum est, nusquam erravit) sed ejus censor insolenter cavillatur; non is insignificanter scribit, ast hic oscitanter legit; non ille rationis naturam minùs perspexit, at hic rationem explicantis verba pervertit; non denique tussit Euclides, sed ὁ δεῖνα inverecundè crepat: omnino sanè dignus, cui talionem quis remetiatur, & illud increpet

Euripideum, —— Ἐπεὶ τὰ μὴ καλὰ
Λέγειν ἐτόλμας, πλῆθε καὶ τὰ μὴ φίλα.
Sed illum soleo nimium morari; (unum obiter adnotabo, quod Nicomachus Gerasenus in Musicis, qua ratione vel authoritate fretus nescio, ordine permutato σχέσιν habet pro
Nicom. specie, λόγον pro genere; Σχέσις, inquit,
Mus. l. 1. λόγος (ἐστὶν) ἐν ἑκάστῳ διαστήματι μετρητικὸς
p. 24. τῆς ἀποστάσεως. Post genus in accidentium de-
2. finitionibus subjecta proximè spectari debent, in relationibus qui dicuntur termini. Hinc adverto proximè τὴν στοιχειωτὴν, cùm Geometricæ materiæ dicaret hoc elementum magnitudinem solummodo rationum definiendam suscepisse. Hinc habetur μεγεθῶν, pro quo siquidem ratio generalissimè definienda esset, substitui deberet τῶν ποσῶν aut τῶν ὅρων· sicut apud Theonem Smyrnæum,
Cap. 19. Λόγος δέ ἐστιν ὁ κατ' ἀνάλογον δυοῖν ὅρων ὁμογενῶν ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις· & Ni-
Lib. 2. p. 62 comachum in Arithmeticis, Λόγος ἐστὶ δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλους σχέσις. Reprehendit autem auctorem nostrum Ramus hac de causa, quòd magnitudinum rationem seorsim definierit, quum ratio convenit omnibus rebus:
Schol. 13. *Elenchus* (inquit) *toto libro perpetuus est Logicæ & Arithmeticæ, ad posteriorem materiam de magnitudinibus alligatæ.* Respondeo primùm, saltem ab hoc ipso censore majorem committi elenchum, qui rationem numeris alligat, materiæ æquè speciali & minus aptæ:
Arith. 2. 20. *Altera* (inquit) *quantitatis comparatio est è numeratione conjuncta, & dicitur ratio, quæ spectatur quotiens consequens in antecedente contineatur.* Quasi verò quantitatis omnimoda comparatio numerationi subderetur, numeris con-

conveniret omnis ratio, vel numeris exprimi posset. Satis constat, nec ipse diffitetur, rationes quasdam dari ἀλόγους & ἀῤῥήτους, surdas & numeris inexplicabiles; at nulla datur in universum ratio, quæ in cujusvis generis magnitudinibus nequit exhiberi. Numerus igitur ineptiùs adsumitur pro rationis adæquato subjecto; magnitudo multùm aptior est, utpote cui nullus rationis modus, nulla species non convenit. Secundò respondeo, cùm (ut jam olim abundè mihi videor comprobâsse) magnitudo sit præcipuum & solum proprie dictum genus quantitatis, & reliqua non nisi κατ' οὐσίαν, κατὰ μεθοχὴν, καθ' ἀναλογίαν, adeóque non nisi secundariò quantorum attributa sibi vindicent, cúmque nos id bene doceat Philosophus, id rationem exigere talium, τὰ πρὸς ἕν vel analogorum, ut quæ primaria sunt eorum respectu communia symptomata seorsim, & imprimis definiantur (Ἀποδοτέον πρὸς τὸ πρῶτον ἐν ἑκάστῃ κατηγορίᾳ πῶς πρὸς ἐκεῖνο λέγεται· &, Ὁ πρώτως καὶ ἁπλῶς ὁμοίως τὰ ἄλλων ὅμοιος ἐστὶ, πλεῖω ἢ πρώτως) hinc meritò magnitudinum ratio primùm definitur & separatim, eíque primariò conveniens definitio nil obstat, quin ad aliorum quantorum rationes analogicè transferatur. Et sanè quicquid magnitudinum rationibus verè tribuitur, & de iis demonstratur, id quantorum omnium rationibus exactè congruit; quatenus omnia quanta prout ipsam suam absolutam quantitatem, ita respectivam quoque consequenter à magnitudine dependentem & determinandam habent. Respondeo tertiò, elementi V conditorem, cùm (sicut

Met. III. 2. VII. 4.

(ſicut paulo jam ante inſinuatum) magnitudinum rationes rebus Geometricis illigatas, ſibimet unicè proponeret excutiendas, ideo ſatis habuiſſe ſi duntaxat ipſarum naturam apertè profiteretur exponere. Scientiarum omnium particularium Magiſtris hoc in uſu poſitum eſt: Grammatici modos & tempora deſcribunt tantùm, ut verborum flectionibus adſignificata: Rhetorici tropos & ſchemata, non ut rebus omnibus, ſed ut dictionibus & ſententiis convenientia: Ethicus virtutes definit, non ut ipſis comprehendantur, quas Plato toties prædicat, equorum camúmque virtutes, ſed humanas tantùm, & τὰς μὲν λόγῳ ποιητὰς· Muſici rationes & diaſtemata non omnium explicant quantorum, ſed τῇ φθόγγων, hoc eſt, ſonorum ἐμμελῶν· nè plura diſciplinæ quæque particulares hoc ſibi juris adſumere ſolent, ut vocabulorum quibus expedit uti, laxiores alioquin ſignificatus ad ſuam ſpecialem deducant, ad ſubſtratam ſibi σκέψιν adaptant aſtringántque terminos ſuos, quatenus uſurpant, eatenus definiunt aut deſcribunt, cùm aliis de cauſis, tum perſpicuitati præſertim ſtudentes, ſed & aliquatenus conſulentes brevitati; eo ſcilicet vitantes, nè aut generalem quandam à ſuo propoſito maxima ex parte ſejunctam doctrinam aliunde cogantur repetere, vel dicendorum intelligentiæ conducentem explicationem omittere. Quòd ſi Logicæ Ramæanæ legibus minùs ad amuſſim congruat hoc, non ideo rationis ipſius adverſatur decretis, aut culpæ obnoxium eſt; nam ex illis vel aliis quibuſcunque Logicis præſcriptis agere ſummo jure, ſumma ver-

versùs authores bonos, & ipsas versùs artes injuria sit. Quin aliud est totam Philosophiam in unum corpus compingere, aliud particulares scientias tradere; isthic ordo rerum, & concinna brevitas, hîc dictorum claritas, facilitas, firmitas potissimùm attenduntur; ubivis interest doctrinam addiscentis captum accommodari. Sed nimis excurro. Porro, responderi posset cum nonnullis, quòd τὸ μέγεθος sic accipi possit, ut omne quantum designet, per istius vocabuli levem quandam & satìs vulgarem καταχρησιν, Nam si numerus sæpe magnus dicitur, & pondus magnum, & magnum tempus, quidni res istæ quatenus quantæ dicantur aliquo modo μεγέθη; & sic elementaris definitio directè satìs ad omnia quanta pertendatur? Verùm Euclidis contra Ramæanam oppugnationem defensioni satìs datum: pergo. Annoto tertiò, cùm magnitudines etiam heterogeneæ possint aliquo modo secundùm aliquid inter se comparari, vel se mutuò respicere; linea nimirum superficiem respiciat, & superficies corpus, quatenus superficies ad lineam παραλλελος (vocabulum est Euclideum) applicari potest velut ad latus ipsius, & corpus ad superficiem tanquam ad basin cui insistat; útque fit linea superficiei perimeter, & superficies corpus ambitu suo claudat; potest & linea quoad unam dimensionem superficiei, superficies quoad duas corpori coextendi, ac eatenus ista cum his comparari: neque non quoad communes alias affectiones, inter istiusmodi quanta genere diversa, compluribus modis institui possit comparatio qualiscunque; à quibus tamen 3.

col-

collationibus emergentes reſpectus admodum diſcrepant ab hoc, juxta quem homogeneæ magnitudines ad ſe referuntur, modo quem hîc intelligit, definitur; eapropter ad excludendos iſtos, quæcunque magnitudines inter heterogeneas verſari poſſunt relationes, aſſignat proprios relationis à ſe deſignatæ terminos, adæquata rationis ὑποκείμενα, limitibus ſuis circumſcripta per adjectum ὁμογενῶν. Sola ſcilicet homogenea quanta rationem habere dicuntur, quia ſolæ ſunt æqualitatis & inæqualitatis capacia, ſola mutuum exceſſum atque defectum admittunt, & his adjuncta ſymptomata Geometricis ſpeculationibus ſubſtrata: ſed de hac re jam ante ſatis ubertim eſt diſſertatum. Neque magnopere Ramum morabor hîc ſanè nulla cum rationis ſpecie nos vellicantem:

Schol. 13. *Imò verò* (inquit) *ratio iſta quam ſibi definiendam proponit Euclides æqualitatis & inæqualitatis, communis eſt omnium rerum, lineáque ſuperficiei corporíque comparari poteſt. Sic lib.* 14. *Elementorum comparantur corpora, ſuperficies lineæ inter ſe; & ſic lunula Hippocratis quadratur, & anguli obliquilinei rectilineis æquantur.* At verò præter hunc cenſorem (anſas ut videatur arripientem omnes, & undicunque cauſas aucupantem lacesſendi veteres illos ſcientiarum Magiſtros, quos tamen æquum eſſet non abſque graviſſima cauſa reprehendere, ſicubíque manifeſtè ceſpitaverint, mitiùs cum iis agere deceret nos, tantorum inventorum illis debitores; præter hunc, inquam, quis iſtiuſmodi comparationes linearum cum ſuperficiebus & corporibus, quales in 14 tractantur elemento, ad rationum naturam

turam cogitavit pertinere? Cùm pentagoni vel decagoni, pyramidis aut octaedri regularium latera qualiter affecta sint inter se, ver erga radium circuli aut sphæræ, quibus inscribi possunt istæ figuræ, investigatur; quis unquam censuit istas rectas lineas, seu latera figurarum, cum ipsis figuris suis quoad rationem comparari? neminem existimo eò imperitiæ accessisse. Id tamen vult Ramus aut nihil, ad rem certè nil aliud quantum assequor intelligere potest. Quis etiam unquam, illo supposito, lunulam Hippocratis, figuram nempe planam terminatam quadrato, vel alteri cuivis figuræ planæ censuit heterogeneam? Quidni pari jure protulisset exemplum magìs obvium sphæram cum cono vel cylindro comparantem, hoc est, corpus unicâ rotundâ superficie comprehensam cum corpore mixtâ superficie concluso? Nempe quid sit homogeneum & heterogeneum, saltem quid per ista vocabula perpetuò significant Geometræ, noluit intelligere, noluit ὁμογένειαν & ἑτερογένειαν ab ὁμοειδείᾳ & ἑτεροειδείᾳ, distinguere. Sed abhinc transeo, & adnoto quartò, 4.
quòd cùm etiam homogeneæ magnitudines, quoad ipsis accidentia multa, comparari queant (quoad speciales puta nonnullas proprietates suas, quoad situm, quoad localem distantiam, quoad ipsarum diversimodas qualitates; addo cum vetere Scholiasta, quoad valorem seu pretium, κατ' ἀξίαν (διττὸς γὰρ, ait, ὁ λόγος ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δ' ἐν ποσῷ) ut e. g. duæ lineæ secundùm rectitudinem aut curvitatem similiter aut dissimiliter se habere possunt; una præstò sit, altera viginti

ti stadiis abhinc semota; una sit alba, altera nigra; cùm tamen hujusmodi relationum nulla significetur hîc, iis secludendis adjungitur κατὰ πηλικότητα, fundamentum scilicet indigitans hujusce relationis. Ad relationum quippe naturam explicandam post genus expressum, & terminos ritè constitutos, fundamentum proximè subjiciendum est, formalem ejus rationem ultimè complens, & differentiæ, quam Logici vocant, essentialis vice defungens. Κατὰ πηλικότητα, quoad quantitatem, hoc est, quoad magnitudinis suæ determinationem, vel magnitudinem ipsam determinatam; saltem secundum quòd quæritur quantæ sunt, & respondetur tantæ. Nam μέγεθος πηλίκον, cui relativè opponitur πενστικὸν hoc πηλίκον, nil videtur aliud denotare quàm magnitudinem ipsam, quatenus per suam (ut ita loquar) singularitatem determinatur in se, & ab aliis quantis distinguitur. Causa verò propter quam aliqua magnitudo, vel potiùs aliquod magnum (plerumque enim confunduntur nomina concreta & abstracta) tali modo refertur ad aliud magnum non alia concipi potest, quàm ideo quòd absolutè tantam in se magnitudinem habet; sicut universim omnis relatio fundatur in aliquo absoluto. Unde non admodum probo, quòd κατὰ πηλικότητα nonnulli exponunt, secundùm quod unum alterius tantuplum est, vel secundùm tantuplicitatem (ejusmodi nempe vocabula nihil verentur confingere δυσκατάληπτον nescio quid significantia). Præterquam enim v.c. quòd non bene sonet hujusmodi definitio duplæ rationis, relatio duorum quantorum secundùm duplicitatem

tatem, videtur tantuplicitas intrinsecè continere vel connotare relationem quandam; at verò relationum fundamenta non sunt relationes, nec relationum implicant, at res absolutæ sunt, propter aut secundùm quas relationum termini ad se referuntur. Malè diceretur, opinor, hoc ei simile est, quia similiter affectum; at bene, quia calidum est vel album; seu propter calorem & albedinem qualitates absolutas: sic & æquale dicitur hoc illi, propter vel secundùm utriusque magnitudinem absolutam, & propter eandem hoc illius tantuplum aut totuplum. Nec eadem de causa mihi perplacet illa Clavii interpretatio, *Secundùm quantitatem, hoc est, secundùm quòd una major est quàm altera, vel minor, vel æqualis.* Non æqualitas, majoritas, minoritas, sunt vocabula quoque relativa, nec idonea proinde relationi fundandæ. Quinimò cùm ratio definitur, ipsæ aliquatenus & virtualiter æqualitas, majoritas, & minoritas, utpote sub ratione seu genere suo comprehensæ, definiuntur. Unde malè collocari videntur in ipsius rationis definitione. Non improbo tamen, & dignam existimo quæ memoretur observationem Græci Scholiastæ, qui κατὰ πηλικότητα potiùs quàm κατὰ ποσότητα consultò positum autumat, quia non omnes rationes numero exprimi possunt, nec omne quantum alterius ullo comprehensibili modo totuplum est: Ἐπεὶ μὲν (ait) τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν ἐστί τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ, διὰ τοῦτο προσέθηκεν ὁ τοῦ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν τὸ κατὰ πηλικότητα· ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς καὶ κατὰ πηλικότητα καὶ κατὰ πο-

ποσότητα ἐστὶν, οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα καὶ ῥητὸς· hoc est, Noluit Euclides quantorum rationem fundari ἐν τῇ ποσότητι (in ipsorum quotitate vel quotuplicitate) quia non omne quantum alterius est ποσὸν, toties ipsum continet, aut continetur in ipso, vel perfectè vel imperfectè, secundùm se, vel secundùm quaspiam ipsius partes aliquotas; sed κατὰ πηλικότητα, quia saltem omne quantum determinatum in se quantitatem habet, juxta quam cum altero & ipso determinatè quanto comparari potest. Sed objectatur huic definitioni sic expositæ, quòd æquè conveniat isti quantorum relationi, quæ differentiam innuit ipsorum τῇ κατὰ τὸ ὑπερέχειν καὶ ἐλλείπειν σχέσει· Nam & illa verè dicitur relatio quædam duorum quantorum ejusdem generis κατὰ πηλικότητα. Respondeo primùm, cùm κατὰ πηλικότητα dicitur hic, subintelligi αὐτῶν, secundùm ipsorum terminorum quantitatem. At relatio differentiam innuens non videtur in ipsorum comparatorum quantitate fundari, sed in quantitate tertii cujusdam, excessûs scilicet, seu quanti absoluti, quo antecedens exsuperat consequentem, vel ab eo deficit. Ejusmodi nempe relatio quæ versatur inter 10 & 8, fundari videtur in binarii quantitate, non in ipsorum 10 & 8 numerorum quantitate. Nam relationem istam satis indicat, exprimítque solitarius iste terminus, exhibitus nempe numerus binarius; at Geometrica ratio non nisi duobus terminis, explicitè potiùs, aut mente saltem intellectis, exprimi potest. Agnoscit hoc doctissimus vir in sua contra Meibomium Diatriba, *Differentiam illam dicimus* (inquit) *non*

Pag. 41.

qui-

quidem Arithmeticam rationem esse, propriè loquendo, aut etiam ipsius rationis essentiam, sed fundamentum istius relationis, quæ dicitur ratio Arithmetica. Quo dicto solvit suam ipsius exceptionem contra definitionem Euclideam nostro modo expositam. Hoc etiam observâsse videtur Aristides Quintilianus, quum Geometricas & Arithmeticas quantorum σκέψεις ita distinguit; Διττοῦ ὄντος τοῦ ποσοῦ, τοῦ μὲν συνεχοῦς ἐπιστάτις οὖσα γεωμετρία, κατὰ μέγεθος ποιοῦσα τοὺς λόγους ὅλα μέρεσι τῶν αὐτῶν συγκρίνουσα· τὸ δὲ διαστηματικὸν ἀριθμητικὴ γνωματεύουσα, μερίζουσα τὸ ὅλον, τὰς τῶν μερῶν πρὸς ἄλληλα ποιεῖται συγκρίσεις. Quæ verba satis obscura sic accipio, Ratio Geometrica comparat inæqualia duo quanta; hoc est, totum & partem, secundùm suas ipsorum quantitates; at ratio Arithmetica quantorum inæqualium differentias spectans consequentem terminum, & excessum considerat, ut partes antecedentis. Sed respondeo secundò, forsan Euclides, cum veterum aliis antea citatis, istam Arithmeticam quantorum σχέσιν non agnoverit, saltem à Geometris nullam habendam ejus rationem censuerit; satisque proinde visum ei fuerit, si definitio sua congrueret omnibus & solis istis quantorum συγκρίσεσι, quas secundùm quantitatem instituunt Geometræ. Nam quantorum dimensionibus & aliis, quoad speciem & situm determinantibus, qui Geometræ scopi præcipui sunt aut soli, sufficere videtur istius relationis consideratio. Nec aliam ferè vulgus ipsum quantorum concipit relationem: etenim cùm vulgò quærunt homines quantum est hoc vel illud, nihil inqui-

runt aliud, quàm quoties id continet ſtatam aliquam & familiariter ſibi cognitam menſuram, vel quoties in illa continetur, hoc eſt, ejus ad hanc menſuram exquirunt rationem Geometricam. Addo tertiò, quòd relatio ſecundùm differentiam, cùm exprimitur numero comparatorum terminorum aliquem denominante, vix reipsâ differat à ratione Geometrica. Ut cùm dico B excedit A per 3A, idem eſt ac ſi dicerem B eſt quadruplum τῶ A, vel ad A referri ſicut 4 ad 1. Aut ſi dicerem B excedere A unâ tertiâ ipſius B, perinde eſt ac ſi dicerem, & hinc facilè conſectatur, B eſſe ſeſquitertium ipſius A, vel habere ſe ad A ut 3 ad 2. Ac hunc fortè reſpexerint, qui rationem conſiſtere dixerunt in quantorum differentia comparata cum utrovis quanto; qui tamen loquendi modus admodum in ſe difficilis eſt & obſcurus, errorúmque ferax graviſſimorum, ut videre eſt ex iis quæ contra Hobbium & Meiboium diſputat eximius vir; quorum igitur rationes explicandi modum nec probo nec defendo. At ſaltem dico relationem quantorum quoad differentiam, ſiquando pro determinandis quantorum menſuris conſiderantur à Geometris, eam ut ab illis adhibetur plerumque cum Geometrica ratione tantundem innuere. Quapropter eam neglexerit Euclides ut vel parum utilem, vel ut minimè diverſam à ratione Geometrica.

Hobb. de Corp. c. 11. § 3, 5. 12. § 8. 13. § 1.

5. Sed progredior advertendo quintò, voces in definitione poſitas πρὸς ἄλληλα communiter exponi mutuò vel ad ſe invicem, quo ſignificari videtur reciprocatio quædam, & alterna relationis hujuſce permutatio, terminis ita

tranſ-

transpositis, ut nunc sit antecedens, qui modò consequens fuerat; quæ quidem interpretatio mihi non arridet, utpote quandam ipsi definitioni absurditatem impingens. Enimverò si terminis transpositis alternetur aut invertatur comparatio, exsurgunt duæ relationes admodum inter se diversæ. Ut v. g. lineæ tripedalis ad pedalem relatio est relatio tripli ad unum, vel ratio tripla; sed inversè relatio lineæ pedalis ad tripedalem est relatio unius ad triplum, vel subtripla ratio, quas rationes denominantium numerorum unus alterius noncuplus est. ($\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\times 3$). Igitur πρὸς ἄλληλα potiùs interpretor unius ad aliam, vel alterutrius ad aliam. Voluit enim proculdubio, certissimè debuit, unam simplicem unius magnitudinis ad aliam, non duas simul rationes sibimet inversas definire. Quia verò nihil intererat utra magnitudo præcedentis, in hac comparatione, vel consequentis locum occuparet (quandoquidem indiscretè quævis magnitudo ad quamvis alteram homogeneam rationem obtinet aliquam) ideo posuit πρὸς ἄλληλα, quo significatur ἀδιαφορία quædam, quoad situm & ordinem terminorum. Si nempe comparentur inter se duæ quælibet magnitudines homogeneæ quoad quantitatem, quæcunque ponatur antecedens, ejus ad alteram relatio dicitur ratio. Neque respuit hanc interpretationem vocabulum ἄλληλον, vel ad rigorem primævæ notionis exactum, sed potiùs favet & juvat. Nam ἄλληλον ex origine denotare videtur ἄλλο ἢ ἄλλο, aliud vel aliud disjunctivè; non ἄλλο καὶ ἄλλο conjunctim. Sed nolo diutiùs hic ἀριθμίζειν. Unicum

6. sextò restat excutiendum vocabulum ποιὰ, de cujus jam ambigitur significatu. Ποιὰ σχέσις verti solet relatio vel habitudo quædam; sed hanc interpretationem nuper è nostratibus egregius quidam Mathematicus improbat, & nescio quid abstrusioris mysterii sub involucro delitescere suspicatur adjecti ποιὰ. Mavult pro quædam substitui qualitativa, hoc est, (ut ipse explicat) quæ ad qualitatis prædicamentum spectet, ideo scilicet quia ratio cum indicatione vel situ partium figurarum speciem & qualitatem determinat. Rejicit autem interpretamentum vulgare, quia vox ποιὸς (ipsius verba sunt) ex usu perpetuo qualitatem respicit; neque tam indefinitè aliquam quàm aliqualem, seu potiùs qualitativam habitudinem hîc innuit, quæ nempe prædicamentum qualitatis spectat. Subjungit autem, Et quidem in accurata definitione nullo modo ferendum videtur, ut ratio definiatur indefinitè ratio quædam, sed determinandum erat, quænam relatio. Porrò, cùm responderi possit satis determinari relationem ex præcedentibus, præsertim ex adjecta conditione κατὰ πηλικότητα· negat hoc sufficere, quia datur alia relatio quantitatem ex æquo spectans, nempe toties memorata relatio secundùm differentiam, quæ tamen ut censet, non est ποιὰ σχέσις. Sed hanc ego tam subtilem expositionem non facilè tamen adducor, ut credam ipsius στοιχειωτοῦ sententiæ consentaneam. Nam primò duriusculum est, ut ποιὸς significet ad qualitatem spectans, vel qualitatis potiùs (secundùm ipsius doctissimi viri sententiam) effectivus seu determinativus.

Arithm. c. 25 contra Meib. 7.
Ἑαυτοντιμ. p. 60.

Va-

Valet equidem ποιὸς apud Aristotelem & alios passim idem quod qualis, vel aliqua quantitate præditus (ut qui habitu quovis, aut potentiâ, vel passione afficitur, ab eo denominatur ποιός τις) at qualificativus vel qualificus (sic enim expositioni suæ congruentiùs vertisset, quàm qualitativus) nusquam ut puto; ad id denotandum rectiùs adhibeatur ποιώτικη (nam ποιῦν est talem reddere) vel explicatiùs τῆς τῶν σχημάτων ποιότητος διοριστική. Igitur loquendi modum attribuit auctori satis improprium, inusitatum, obscurum, adeóque definitionum legibus & naturæ nimis incongruum. Addo quòd ab intrinseca rationis natura videatur satis remotum, eíque tantùm ex accidente competere, quòd nonnihil aliquando conferat ad figurarum speciem, seu qualitatem determinandam. Non in solis figuris consideratur, at sæpiùs extra illas, nec aliter illarum determinationi inservit, quàm magnitudinum quarundam, linearum nempe vel superficierum quibus ambiuntur figuræ, quantitates priùs determinando. Non igitur verisimile videtur, definitiones auctorem huc attendisse, quum definitiones necessaria tantùm, universalia, ac primaria notionum attributa complecti debeant. Et quòd ad rationis prædicamentum attinet, ipsa simpliciter ad relationem pertinet, respectivè verò propter terminos comparatos ad quantitatem (semper enim illi sunt res quantæ quatenus quantæ) reducatur, magisque propter fundamentum suum, quod est absoluta quæpiam quantitas, ut supra dictum. Vulgò dicitur & quantitatis proprietatibus accensetur, quòd ab illa

res dicuntur æquales & inæquales, hoc est, una alterius simpla, dupla, tripla, &c. hoc est, erga alteram tali ratione affecta. Ergò potiùs ratio est πρός τι quantitativa, sicut similitudo, quia fundatur in aliquâ qualitate, dici solet relatio in qualitate, seu qualitativa. Absonum verò plerisque ni fallor auribus foret dici, relatio qualitativa secundùm quantitatem; nam si secundùm quantitatem, ergò quantitativa potiùs quàm qualitativa. Præterea, quòd non ut pertenditur vox ποιὸς etiam in definitionibus posita semper qualitatem aliquam propriè dictam, at verò sæpiùs meram particularitatem, hoc est, generalis vocabuli restrictionem indefinitam, designet (eo pacto ac si homo definiretur, animal quoddam ratione donatum, ubi quoddam inquit tantum, confusè quidem & indistinctè nullos certos limites assignando, hominis nomen sub animalis nomine contineri, nec ei penitus adæquari) quòd, inquam, ita se res habeat, innumeris adstrui possit exemplis prostantibus apud veteres etiam Mathematicos. Ita Theon analogiam definit,

Cap. XXI. Ἀναλογία ἐστὶ λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις, rationum inter se habitudo, non qualitativa opinor, quæ enim isthic intervenit qualitas? at quædam saltem. Musicæ harmoniæ genus (χρῶμα) Aristides Quintilianus

Pag. 16. definit, ποιὰν τάσεως διάθεσιν, non qualitativam credo significans divisionem nescio quam, at certam aliquam: quum scilicet testrachordum innumeris modis dividi possit, genus tamen Musicum non omnescunque sectiones istæ, sed certæ quædam constituunt; una scilicet aliqua genus diatonicum, alia chro-

chrometicum, tertia enharmonicum. Consonat Euclides, Τόνος (inquit) ἐστὶ ποιὰ ποσὰ συστήματος φθόγγων διαφορά. Idem Aristides, Ἡμιολιόν ἐστι τὸ ἐν φθόγγων, καὶ διαστημάτων ποιὰν τάξιν ἐχόντων. Ποιὰν τάξιν, ordinem quendam, non ordinem opinor qualitativum. Nicomachus in Enchiridio διάστημα definit, ὁδὸν ποιὰν ἀπὸ βαρυτήτος εἰς ὀξύτητα ἢ ἀνάπαλιν. *Lib. I.* Ejusdem est Thrasylli definitio, Ἐστι διάστημα φθόγγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις· ubi notabile est Arithmeticam ipsam rationem vel differentiam, quæ inter duos φθόγγους, seu sonos harmonicos intercedit, districtè vocari ποιὰν σχέσιν, quas scilicet doctissimus vir solam quantitativam relationem agnoscit, & Geometricam rationem velut ei contradistinctam appellari censet ποιὰν σχέσιν, hoc est, relationem qualitativam. *Theon.* Quia verò ferenda non arbitratur in definitionibus accuratis indefinita talia vocabula, dicendum est optimos saltem authores admisisse talia; præter mox adductos, unum citabo Euclidem, qui in Isagoge harmonica proximè contiguis duabus definitionibus inseruit vocabulum τρόπος· Τόνος (inquit) ἐστὶ τοῦ τρόπου τὸ φωνῆς, διαστήματος συστηματικοῦ, ἁπλοῦς. Et dein, Μεταβολὴ ἔστιν ὁμοίου τρόπου εἰς ἀνόμοιον τόπον μετάθεσις. Ecce τόπος τρόπος, ὁμοίου τρόπου. Non abhorruit is scilicet ab ejusmodi vocibus, neque centè meâ sententiâ abhorrere debuit. Nam in omni prædicatione vocabuli latioris de angustiore, generalioris de magis speciali, si non exprimitur, tacitè saltem intelligitur restrictio quædam. Ut cùm dicitur, Homo est animal, intelligitur animal quoddam; quód-

qué ſubticetur in propoſitione directa, redditur & expreſsè pronunciatur in converſa, Quoddam animal eſt homo. Quod autem ſemper ſubintelligitur, id nonnunquam ſine culpâ proferri poteſt, quare non video cur improbari debeant iſtiuſmodi definitiones; homo eſt animal quoddam ratione præditum; triangulum eſt figura quædam plana tribus rectis lineis comprehenſa; ratio eſt relatio quædam homogeneorum quantorum ſecundùm quantitatem. Quòd verò definitionem hanc vulgari modo acceptam æquè convenire putat Arithmeticæ rationi, à qua tamen diſtingui debuit; ad id jam ante προλαμβανόμενος reſponſum eſt, cùm quid ſit κατ' ἀναλογίαν, referri conati ſumus explicare. Nunc tantùm adjiciam, elementatori hac in definitione tradenda non aliud forſan propoſitum fuiſſe, quàm ut methodi plenioris aut ornatûs qualiſcunque cauſâ, præludens ſcilicet accuratioribus iſtis Ejuſdem, Majoris, & Minoris rationis definitionibus, mox ſubjungendis, generalem quandam & ὁλοσχερῆ τῶν λόγων, ideam diſcentium inſinuaret animis per Metaphyſicam hanc definitionem; Metaphyſicam dico, nec enim proprie Mathematica eſt, cùm ab ea nihil quicquam dependeat, aut deducatur in Mathematicis, nec ut exiſtimo deduci poſſit. Cujuſmodi quoque cenſeri poteſt poſthac tradita definitio, vel definitio potiùs analogiæ; analogica eſt rationum ſimilitudo, quæ nulli Mathematico deſerviat uſui, nec alio opinor fine proponitur, quàm ut per eam generalis quædam analogiæ notio, craſſa licet & confuſa, tyronibus ingeratur. Definitionibus autem exquiſitis

sitis Mathematicis, mox ab illo subjunctis tota rationum doctrina, tota res Mathematica subnititur; ad illas igitur potissimùm attendi debet, per illas rationum doctrina perfectiùs elucescit; hæc & consimiles absque notabili Matheseôs detrimento prorsus omitti possent: sicut in Elem. VII. factum videmus, ubi numerorum analogia definitur & pertractatur, nullâ tamen rationis numero competentis exhibitâ definitione; quamvis illic æquè necessaria fuit & utilis definitio talis atque hîc est; sed neutro loco magna fuit necessitas. Quanquam haud credo rem ipsam adeò generalem & abstractam, eóque conceptu magis arduam & explicatu. definitionis esse capacem commodioris hàc quàm Elementator assignavit, quam ideò visum est uberiùs explicare; neque non ab oppugnantium captionibus asserere. Ubi pedem figo nunc; proximâ Lectione rationis ad species, & symptomata potiora gradum promoturus.

LECT. IV.

RAtionis Geometricæ naturam utcunque delineavimus, definitionem ejus in elementis consignatam quà explicando quà asserendo. Aliter (πλατυτέρως quidem & παχυλοτέρως, at fortasse magis ad captum communem) declaretur hæc res dicendo, quòd ratio sit modus determinatus quo unum quodvis quantum continet aliud, vel ab eo continetur, idem vel perfimilis ei modo, juxta quem unum alterius totuplum dicitur, aut

alterum toties continere ; vel esse talis pars vel tot partes alterius, aut toties in altero contineri ; qui certè modus, quum collata quanta numeris efferri possunt, facillimè comprehenditur à nobis ; ut modus quo libra continet unciam nil innuit aliud, quàm quòd hanc illa duodecies contineat, vel ad hanc se habeat, sicut 12 ad 1, unde libra dicitur ad unciam sortiri rationem duodecuplam. Modúsque quo longitudo pedalis in passu Geometrico continetur, nihil est aliud quàm illam hujus esse partem quintam, vel ad eum se habere sicut 1 ad 5, quod significatur dicendo rationem pedis ad passum esse subquintuplum. Qui modus abstracto vocabulo quintuplicitas, aut (verbo veniam) quintuplitas (πενταπλότης aut πεμπλασιότης) exprimitur & enuntiatur. Cùm verò collata quanta (quoad absolutam suam quantitatem) talia sunt, ut numeris perfectè nequeant exprimi, saltem intelligi potest, quòd aliquo determinato modo illud continet hoc, vel in hoc continetur, aliter scilicet quàm aliud quodvis illi inæquale continet, hoc vel in eo continetur ; ac ita quidem ut ille continendi modus persimilis sit ei, quo numeris denominata quanta se continent, aut in se continentur respectivè ; posítque simpliciter & ex parte rei semper numeris exprimi quàm proximè. Sicut v.g. cùm ratio peripheriæ circularis ad diametrum. nobis quoad ἀκρίβειαν ignorata, repræsentatur dicendo, quod peripheria sit diametri tripla sesquiseptima, hoc est, ter ipsam contineat & ejus unam septimam partem, apponendo ferè vel propè. Sic & ratio

tio diametri ad latus quadrati, quæ numeris exprimi præcisè natura rei non patitur, potest utcunque numeris ad verum accedentibus repræsentari; dicendo quòd diameter se habet ad latus, ut 1.4 ad 1 ferè; vel propiùs, ut 1,41 ad 1; vel adhuc accuratiùs, ut 1.416 ad 1: & sic porrò magis ad *Exactum* appropinquando. Verùm rationis naturam ulteriùs illustrare conabimur, primò speciem ejus & differentias exhibendo (siquidem ad generum perfectiorem notitiam luculis plurimum & subsidii confert subjectarum specierum comprehensio, utpote quarum ex convenientia quoad essentialem aliquam proprietatem, constituantur & quasi generantur ipsa genera) tum secundò, rationum accidentia quædam primaria (comparationes inter se, compositionem, continuationem, additionem, subtractionem, divisionem, reductionem exponendo) nec non interea quæstiones aliquas obiter incidentes in controversia positas, non parum ad cujusce materiæ illucidationem conferentes, eventilando. Quod rationis species attinet, ejus divisio naturalissimè prima terminorum diversam affectionem consequitur hoc modo: antecedens rationis vel major est consequente, vel æqualis ei, vel minor eo; hinc tres rationis species subnascuntur: Ratio quanti majoris ad minus, æqualis ad æquale, minoris ad majus; communiter appellantur, Ratio majoris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis; possint autem simpliciùs & brevius nuncupari majoritas, æqualitas, minoritas (nosque nominibus his eas subinde brevitatis causâ designabimus) nonnulli verò ma-

majoritatem & minoritatem vocitant rationem excessûs & defectûs; quæ vocabula nos quoque fortassis interdum adhibebimus. Eodem recidit διχοτομία duplex, quum nempe ratio primò scinditur in rationem æqualitatis & inæqualitatis, tum porrò subsecatur inæqualitatis ratio in rationem majoris & rationem minoris inæqualitatis. Quæ divisio proba satis & commoda; rectéque Nicomachus, Τοῦ πρός τι τοίνυν ποσοῦ δύο αἱ ἀνωτάτω γενικαὶ διαιρέσεις εἰσὶν ἰσότης καὶ ἀνισότης· τᾶν γὰρ ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρούμενον ἤτοι ἴσον ὑπάρχει, ἢ ἄνισον, τρίτον δὲ παρὰ ταῦτα οὐδέν. Res ex se clarior est, quàm ut exemplis illustrari possit aut debeat; unum tamen apponemus, ratio libræ ad unciam (vel numeri 12 ad 1) est majoritas, aut ratio majoris inæqualitatis, aut excessûs ratio, quoniam antecedens consequente major est. Ratio ponderis quadrantalis ad 3 uncias est æqualitatis ratio, quoniam antecedens adæquatur consequenti; ratio verò unciæ ad libram est minoritas, vel ratio minoris inæqualitatis, vel ratio defectûs, quia antecedens consequente minor est. Nescio verò num attineat observare, quò devitetur ex ambiguitate pronascens error, quòd nonnunquam apud scriptores Græcos ratio majoris ad minus dicitur μείζων λόγος, æqualis ad æquale ἴσος λόγος, & minoris ad majus ἐλάσσων λόγος. Theon Smyrnæus, Τῶν λόγων οἱ μὲν εἰσὶ μείζονες, οἱ δὲ ἐλάττονες, οἱ δὲ ἴσοι· quas modò descripsimus innuens rationum species. Sed impropriè proferuntur, & bene nobis cavendæ sunt ejusmodi locutiones; nam ratio major, æqualis, minor, frequentiùs

Lib I. p. 24.

Cap. 22.

quentiùs & magis propriè designant ipsarum rationum inter se comparatarum respectus, non singularum absolutè sumptarum rationum species. Instantiæ causâ, comparando rationis dodrantis ad trientem, & bessis ad trientem; major est ratio dodrantis ad trientem, quàm bessis ad trientem; (hoc est, major est ratio numeri novenarii ad quaternarium, quàm octonarii ad eundem quaternarium). Sed rationis dodrantis ad trientem, & bessis ad trientem, simpliciter in se spectatæ, non bene dicuntur majores rationes, sed majoritatis, aut excessûs, aut inæqualitatis majoris rationes, hoc est, rationes majorum quantorum ad quanta minora. Hæc est rationum prima divisio. Aliter autem dividitur ratio (vel inæqualitatis ratio, nec enim interest utrum ratio sic universim vel singillatim inæqualitatis ratio dividatur) aliter, inquam, ratio dividitur, intuendo quantorum ista symptomata, nobis jam ante quadantenus explicata, symmetriam dico & asymmetriam. Nam quia terminorum inter se comparatorum aliqui symmetri vel commensurabiles sunt, hoc est, eodem quanto semel aut aliquoties accepto mensurari, completè dividi, penitus exhauriri, adeóque numeris accuratè exprimi possunt; alii verò termini sunt asymmetri, vel incommensurabiles, hoc est, nullâ communi mensurâ mensurabiles, nullâ parte aliquotâ eidem gaudentes, & proinde sic affecti, nullis ut numeris possint exprimi, vel perfectè repræsentari. Hinc emergit divisio rationis in effabilem & ineffabilem, λόγον ῥητὸν & λόγον ἄῤῥητον. Ubi tamen notandum quod hæ vo-

tes (ῥητὰ δυνάμει) ab Euclide in Elementō X paulò ſecius uſurpantur, cùm enim adverteret Euclides expoſitā quāvis rectā lineā (quam ῥητὴν vocavit, utpote quolibet ad arbitrium numero denominabilem vel effabilem) cum illa comparatas lineas in triplici differentia verſari; alias nempe longitudine cum illa commenſurabiles eſſe; alias verò quoad longitudinem quidem incommenſurabiles dari, ſic tamen ut ipſarum quadrata commenſurabilia ſint, & numeris denominabilia, veras ipſorum ad expoſitæ quadratum rationes exhibentibus perfectiſſimè; alias autem complures non longitudine tantùm ipſi expoſitæ, ſed potentiâ quoque (hoc eſt, ſecundùm ipſorum quadrata expoſitæ quadratō) incommenſurabilia eſſe; hoc, inquam, cùm adverteret, priorum duorum generum lineas appellare voluit ῥητὰς, hoc eſt, quadantenus & qualitercunque exprimibiles; at poſtremi generis lineas vocavit ἀλόγους vel ἀῤῥήτους, hoc eſt, nullatenus explicabiles, aut ineffabiles numeris. Itaque ſecundùm Euclidem aſymmetra nonnulla quanta videntur habere λόγον ῥητὸν inter ſe (ſi enim quanta ipſa dicantur effabilia, conſequenter ipſorum ratio fuerit effabilis) habent, inquam, longitudine (vel aliter in ſuo genere) commenſurabilitatis incapacia quanta λόγον ῥητὸν, quatenus etiā nequit ipſorum ratio numeris ullis communibus immediatè repræſentari, poteſt tamen quodammodo mediatè, quadratorum nempe ſuorum interventu, quando numeris illa vere denominantur & exprimuntur: ſiquidem inde dici poſſunt latera vel radices quadratæ talium nu-

numerorum; cujuſmodi ſaltem expreſſio ſufficit ipſorum relativæ quantitati determinandæ, faciendóque cùm ut ipſa qualitercunque ſubjiciantur æſtimationi noſtræ, tum ut reipſâ facilè poſſint exhiberi. Verùm invaluit apud pleroſque, rationíque bene conſentaneum videtur, ut incommenſurabilium quantorum rationes dicantur ἄῤῥητοι, hoc eſt, ineffabiles; quia ſcilicet hujuſmodi rationum termini vulgò notis & receptis numeris propriè & immediatè nequeunt efferri, néſque proinde ſenſum hunc retinebimus, quamvis maluit doctiſſimus Borellus (hanc forſan ambiguitatem vitans) dividere proportionem in commenſurabilem & non menſurabilem, vocabula nova comminiſcens, nec admodum ut exiſtimo commoda. Nam proportiones quantorum incommenſurabilium æquè ſunt ipſæ menſurabiles, ac proportiones quantorum commenſurabilium; aptiùs opinor & accuratiùs mentem enunciaſſet ſuam obliquo caſu, dicens proportionem eſſe vel quantorum commenſurabilium, vel incommenſurabilium quantorum. Sed ὁ λόγος hoc, ad rationum propoſitas ſpecies revertamur. Λόγος ῥητὸς, effabilis ratio eſt, quæ numeris exprimi poteſt; numeris (inquam) veris, quos vocant, & vulgaribus; integris, mixtis, fractis; imò ſemper integris numeris exprimi poteſt: quandoquidem ratio quævis numerorum utcunque fractorum, vel ex integris & fractis compoſitorum, ſemper ad integros adduci poteſt per fractorum denominatores multiplicando. Exempla præſtant omnes ejuſdem generis menſuræ, in uſu vulgari conſtitutæ, quales

pro

pro dimetiendis longitudinum intervallis digitus, ſpithama, palmus, pes, cubitus, orgya, paſſus, ſtadium, miliare, leuca; pro taxandis ponderibus granum, drachma, uncia, libra; pro computandis pecuniis as, ſeſtertius, denarius, ſolidus, marca, libra; pro temporibus computandis annus, menſes, dies (civiles hos intelligo, nam an hæ partes temporis naturales ſint commenſurabiles inter ſe nullo conſtat, aut conſtare poteſt indicio) hora, minutum. Hæc enim & conſimilia quanta rationes inter ſe effabiles habent, eóque vulgares ad uſus accommodantur. Ratio, inſtantiæ causâ, marcæ ad libram effabilis eſt, quia numerus $\frac{2}{3}$ & 1, vel numeris 2 & 3, vel aliis quibuſvis ſubſeſquialteram obtinentibus inter ſe rationem exprimuntur. Sic & aſſis ad ſeſtertium ratio effertur numeris $\frac{2}{5}$ & 1, vel numeris 1 & $2\frac{1}{2}$, vel numeris 2 & 5; quæ ratio dicitur ſub-multiplex-dupla ſeſquialtera, ut ſtatim oſtendemus. Λόγος autem ἄρρητος (ineffabilis ratio, quibuſdam ἄλογος λόγος, ratio irrationalis, vel potius indicibilis, quia dici vel exprimi nequit) eſt illa quæ verſatur inter aſymmetra quanta, quorum ratio nullis numeris, veris & vulgaribus, exprimi poteſt exacte perfectéque. Talis eſt in exemplo vulgatiſſimo ratio diametri ad latus quadrati; nam in tota ſerie numerorum poſſibilium (integrorum, fractorum, miſtorum) nulli duo numeri poſſunt inveniri, nulli dantur omnino, quorum ratio repræſentat exquiſitè rationem quantis illis duobus intercedentem. Quoniam enim (quod in elementis demonſtratur) quadratum ex diametro duplum eſt quadrati ex latere

tere, nullíque dantur in tota vulgarium numerorum congerie numeri duo quadrati, duplex alter alterius, ergò nulli dantur numeri, qui rationem exhibeant diametri ad latus. Taléſque reperiuntur in omni genere quantorum innumeræ rationes, adeò quidem ut inter ſe comparando figuras regulares, cùm planas tum ſolidas, eidem circulo vel ſphæræ inſcriptas aut circumſcriptas, vix ullas invenire ſit, quæ vel quoad latera ſeu perimetros, vel quoad areas, & quoad ſoliditates ſuas rationem habeant inter ſe numeris explicabilem. Unde quo rationes horum & aliorum plerorumque quantorum qualitercunque referri poſſent ad numeros (utpote ſymbola quantorum generaliſſima, notiſſima, commodiſſima) neceſſe fuit numeros ſurdos (quos vocant & irrationales) comminiſci, quibus iſtorum quantorum rationes utcunque poſſent exprimi. Et harum quidem ineffabilium rationum nullæ recenſentur ſpecies (quia differentes, quibus ipſarum termini ſe continent aut reſpiciunt, modi bene concipi diſtingui nequeunt, & nullum excogitari proclive ſit pro iis aliter exprimendis compendium) at rationum, quæ vulgò numerantur, effabilium ſpecies percenſere conabor, & exponere quàm breviſſimè (quorſum enim quæ tradita proſtant ubivis, & per ſatis clara ſunt, operoſiùs inculcare? Mihi potiùs inſtitutum eſt, quæ protrita minùs, & magis involuta videntur, ſtudio meo qualicunque ventilata, judicio veſtro perpendenda commendare, quæ paſſim obvia, vel admodum aperta ſunt levi pede tranſcurrendo) ad rem. Nihil imprimis manifeſtius

eſt, quàm æqualium quantorum rationem ſemper effabilem eſſe, utpote quæ quibuſvis æqualibus numeris exprimi queat. Habet v.g. ſe quodvis æquale quantum ad aliud quodvis, ut unitas ad unitatem, vel binarius ad binarium. Igitur æqualitatis ratio conſtitui poteſt prima ſpecies effabilium rationum. Inæqualitatis autem ratio cùm duplex ſit, ut vidimus, majoritas aut minoritas, vel exceſsûs defectúſque ratio, majoritatis effabilis quinque vulgò ſpecies ſtatuuntur, quibus inverſe correſpondent totidem ſpecies minoritatis. Eas recenſebimus & exponemus, ita tamen ut diviſionis hujus fundamentum & originem (id quod in omni diviſione technica potiſſimùm ſpectari debet) priùs inveſtigemus. Id aggredimur facere notando, quod cùm duo quanta comparamus inter ſe rationem habentia effabilem, vel eorum vice numeros quibus repræſentantur, modum ſcilicet inquirentes, quo antecedens conſequentem continet, aut in eo continetur, hunc repræſentare contendimus in numeris quoad ejus fieri poteſt minimis; quia ratio quævis in minimis terminis faciliùs æſtimatur & comprehenditur. Igitur enitimur, ut eorum alter, conſequens nempe, ſit ipſa unitas, numerorum infimus & ſimpliciſſimus; quo præſtrato terminum antecedentem indagamus unitati, tanquam conſequenti congruentem: iſte terminus rationis æſtimationi ſubjectæ denominator dicitur, ipſam quippe denominans, & declarans ad captum noſtrum commodiſſimè. Quoniam verò diviſionis Arithmeticæ talis eſt natura, ut quoties numerus dividendus di-

diviſorem continet, toties inventus quotiens contineat unitatem, ideo reperitur iſte denominator (vel antecedens rationis, cujus conſequens unitas) dividendo propoſitæ rationis antecedentem per conſequentem. Porrò, cùm denominator iſte, vel quotiens inventus, pro ipſorum terminorum intrinſeca diverſitate diverſimodæ ſpecie numerus eſſe poſſit (integer nempe, vel fractus, vel miſtus; & fractus quidem ac miſtus non uno modo) conſiderando puta v.g. rationem majoris inæqualitatis dictus quotiens per terminorum diviſionem repertus, poterit eſſe vel numerus integer, vel unitas cum adjecto numero fracto, cujus numerator ſit unitate major, vel numerus integer unitate major cum fracto adnexo, cujus numerator ſit unitas, vel denique numerus integer cum fractione, cujus numerus exſuperet unitatem. Ex his quinque dicti quotientis variis modis aut ſpeciebus emergunt quinque ſpecies majoritatis effabilis, quæ vulgò cluent ratio multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens; quibus opponuntur & inversè reſpondent (ἀνάλογον) & ἀνθυπαλλάσσει, verba ſunt Nicomachi) minoritatis rationes ſubmultiplex, ſubſuperparticularis, ſubſuperpartiens, ſubmultiplex ſuperparticularis, ſubmultiplex ſuperpartiens: quas nunc ordine perluſtrabimus. Multiplex vel multipla ratio dicitur inter duos terminos verſari, quum antecedens conſequentem continet multoties (unde nominis impoſitio) vel cùm antecedens conſequentem aliquot vicibus (bis, ter, decies, centies, aliquoties utcunque) 1.

que) continet exactè; vel quum consequens
Theon. antecedentem perfectè dementitur (ἀπαρίθμησις καὶ μετρεῖ) hoc est, sic ut nihil quicquam supersit residui. Vel, quod idem est, cùm consequens est antecedentis pars quæpiam aliquota, quæ aliquoties accepta totum eum componit, exæquat, complet; adeóque denominator hujusce rationis est perpetuò numerus aliquis integer. Ita passus Geometricus ad pedem habet rationem multiplam, integro numero quinario denominatam; quia pes quinquies acceptus passum constituit præcisè, vel quia passus quinquies includit pedem, & nihil præterea. Hinc liquet hanc rationem tot habere species sibi subordinatas, quot dari possunt integri numeri, per quos denominentur & distinguantur, infinitas. Ut ratio dupla, tripla, decupla, centupla, millecupla, &c. sunt rationis multiplæ species. Græcis autem dicitur hæc ratio λόγος πολλαπλάσιος (quasi πολλαπολλάσιος vel πολλαπλεονάσιος) & species ejus similiter terminatæ sunt διπλάσιος, τριπλάσιος, δεκαπλάσιος, ἑκατομπλάσιος, &c. Huic universè respondet & ἀνυπέρφορος est minoritatis ratio, submultiplex dicta, quam scilicet obtinent multiplicis rationis termini transpositi; ut si A sit multiplex τοῦ B, erit B submultiplex τοῦ A. Ideo ratio submultiplex est, quum antecedens consequentem justè demetitur, est ejus aliquota pars, aliquot vicibus in eo continetur; ejúsque denominator est semper aliquis simplex numerus fractus, habens unitatem pro numeratore. Ita pes ad passum rationem habet submultiplicem, utpote quinquies in

passu

passu comprehensus, & denominatorem habens $\frac{1}{3}$. Habet item similiter hujusmodi ratio tot species, quot esse possunt numeri fracti simplices numero quolibet denominati, sed unitatem obtinentes loco numeratoris. Ut ratio subdupla, subtripla, subdecupla, subcentupla, &c. Nam quia commodè significari nequeunt hæ rationes vocabulis vulgò usurpatis designantur à Mathematicis, præponendo sub ipsis inversarum multiplicium rationum nominibus. Quod attinet enim vocabula, secunda, tertia, decima, centesima, millesima (quibus efferuntur unitatis partes aliquotæ) non ita commodè possunt hisce denotandis rationibus adhiberi, quia præterea sunt ordinales, & nedum divisionem in partes, at locum quoque certum indigitant rerum in aliqua serie dispositarum; ut tertius à Romulo rex, sapientum octavus, centesimus abhinc annus; respondentque Græcis πρώτῳ, δευτέρῳ, τριτῳ, &c. ideóque subjacent ambiguitati. Alias non video quin ratio tertia, quarta, decima possint hisce denotandis rationibus inservire, æquè ac dupla, tripla, decupla multiplis. Vocabula verò semissis, triens, quadrans, &c. rationes quidem has indigitant, sed obliquo tantùm casu, nam bene dici potest ratio semissis, trientis, quadrantis ad unum; nec ipsa tamen semissis aut triens est ratio. A Græcis verò designatur hæc ratio terminatione μόριον aut μοιριαῖον (liquet unde deducta) subjunctâ vocabulis numerorum ordinem signantibus; ut λόγον ἡμιμόριον (aut ἡμιμοιριαῖον) τριημόριον, δεκαημόριον, δωδεκαημόριον, &c. pro subdupla, subtripla,

pla, &c. sed ab hisce subinde designantur hæ rationes anteponendo præpositionem ὑπὸ.
Pag. 25. Nicomachus, Ὅυτω καὶ ἕκαστον ἑκάστῳ τῇ προλεχθείσῃ τάξει μετὰ τὴν ὑπὸ προθέσεως ἀντιδιαστελλόμενα, ὑποπολλαπλάσιον, ὑπεπιμόριον, ὑπεπιμερὲς· & apud illum, ὑποδιπλάσιος, ὑποτριτιλάσιος, & sic porrò submultiplicis species adnumerantur. Ex his patet quòd rationis multiplicis & submultiplicis communes sunt termini correlati totum & pars; accipiendo totum juxta nativam vocis originem, pro eo quòd toties aliud complectitur, & partem pro parte aliquota, juxta sensum & definitionem Euclidis; Μέρος ἐστι μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Sed ad alias species pro-
2. gredimur. Ratio superparticularis dicitur, cùm antecedens consequentem ita excedit, ut supersit consequentis pars quæpiam
Theon. c. 24 aliquota (hinc ratio nominis) vel cùm antecedens consequentem semel, nec pluries includit, & præterea tantùm unam ejus partem aliquotam; vel cùm per consequentem divisus antecedens quotientem exhibet unitatem, cum unitate quoque residua per consequentem adhuc dividenda; adeóque cujus denominator est unitas cum annexo numero fracto vice numeratoris habente unitatem. Talem rationem obtinet cubitus ad pedem, quia cubitus pedem superat unâ parte dimidiâ pedis; sic & dodrans ad bessem rationem habet superparticularem quia dodrans bessem continet semel, & ejus insuper partem octavam, vel quia $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$. Rationis hujus quoque species infinitæ sunt, pro denominatorum infinita multitudine; quæ distinctè

ſtinctè ſignificari ſolent ad numerorum ordinalium nomina præfigendo particulam ſeſqui (hoc eſt, ſe atque partem aliquam præterea; licèt aliter minùs ad rem noſtram ἐπιμολογίαν Grammaticorum filii) ut ſeſquialtera (vel ſeſquiſecunda) ſeſquitertia, ſeſquidecima, ſeſquicenteſima; quæ voces ſic intelligi debent, cùm antecedens conſequentem ſuperat unâ parte dimidiâ, (quomodo 12 excedit 8, vel as beſſem) dicitur ille ſeſquialter, aut ſeſquiſecundus hujus: cùm antecedens conſequentem ſemel includit, & ejus unam partem tertiam (ut 12 excedit 9, vel as dodrantem) dicitur is hujus ſeſquitertius: & ſimili perpetuò ratione. Græcis hæc ratio dicitur λόγος ἡμιόλιος (propter particulam conſequentis unitati ſubnexam, modo expoſito) & deſignantur ejus ſpecies ordinalibus numeris præponendo ἐπί. Ut ἐπιτρίτου λόγος (qui ſæpiùs ἡμιόλιος, quaſi totus conſequens cum ejus ſemiſſe, vel totus antecedens demptâ conſequentis ſemiſſe; ſed & obiter adnoto Græcos antecedentem hujus rationis plerumque efferre, præponendo conſequentis nomini vocem τρία· ut τριημιώριον ſeſquihora, τριημιόβολον ſeſquiobolus; quia nempe ſeſquihora (hoc eſt, una hora cum horæ ſemiſſe) eſt dimidia pars trium horarum, & ſeſquiobolus eſt ſemiſſis trium obolorum: ſed in orbitam). Speciem, inquam, hujus rationis à Græcis nominantur ἐπιτρίτου λόγος (vel * ἡμιόλιος) ſeſquialter, ἐπίτριτος ſeſquitertius, ἐπιδέκατος ſeſquidecimus; & ita ſimiliter. Hujus rationis inverſa vel ὑπολόγος (antequam progredior hoc adverto, quòd à veteribus Arithmeticis

* *Apud Theonem* ἐφημιόλιος, *forſan ex mendo.*

ticis rationum majoritatis ſpecies (vel ipſarum denominatores) dicebantur πρόλογοι, minoritatis autem iis correſpondentes ſpecies ὑπόλογοι· unde Nicomachus ait, Τὰς ὑπολόγους ἀνθυπακούειν τοῖς προλόγοις, hypologos prologis ex adverſo reſpondere: ut v.g. ratio quadruplex eſt πρόλογος, ratio ſubquadruplex ὑπόλογος· ratio ſeſquitertia eſt πρόλογος, ratio ſubſeſquitertia eſt ὑπόλογος· & ita de reliquis quæ ſubſequuntur. Rationis, inquam, ſuperparticularis hypologus vel inverſa dicitur ſubſuperparticularis (etiam
Met. IV. Græcis ὑπεπιμόριος· quæ vox alicubi ſuccurrit hoc ſenſu apud Ariſtotelem) ſicut & ejus ſpecies ſubſeſquialtera, ſubſeſquitertia, ſubſeſquidecima, & ſic perpetuo; Græcis itidem ὑφημόλιος, ὑποεπιτρίτος, ὑπεπιδέκατος. Quarum rationum indoles ſatis elucebit ex oppoſitarum perſpecta natura; differunt enim ab iis ſolâ terminorum tranſpoſitione, & ipſarum denominatores ita ſe habent ad unitatem, ut unitas ad denominatores rationum ipſis inverſarum. De quo tamen hoc adnotabimus, quòd rationis ſubſuperparticularis denominator eſt ſemper aliquis numerus fractus, cujus numerator à denominatore deficit unitate; ut ſubſeſquialteræ denominator eſt $\frac{2}{3}$, ſubſeſquitertiæ $\frac{3}{4}$,
3. & ſic continuò. Procedimus ad rationem ſuperpartientem, ea dicitur inter duos numeros haberi, quum antecedens conſequentem ſuperat partibus quibuſdam aliquotis, unâ pluribus (hinc nominis cauſa). Vel cùm antecedens conſequentem ſemel includit, & plures adhuc ejus partes aliquotas (plures ſcilicet partes, quæ partem unam

ali-

aliquotam conficere nequeunt; notanda est hæc exceptio, quo distinguatur hæc species à superparticulari) vel quum antecedens per consequentem divisus exhibet unitatem pro quotiente, cum residuo unitatem excedente; idcircóque cujus denominator est unitas cum adnexo numero fracto, cujus numerator unitatem superat. Ita dodrans ad septuncem (hoc est, numerus 9 ad 7) habere dicitur rationem superpartientem, qui dodrans septuncem exsuperat duabus septimis partibus. Gaudet & hæc ratio speciebus infinitis, ex denominatorum infinita varietate, quæ verbis ita sunt exprimendæ, ut fractionis unitati subnexæ (in denominatore propositæ rationis) cùm numerator tum denominator enuncientur. Appellantur nempe ratio superbipartiens tertias, quintas, septimas, &c. In exemplum, ratio numeri 12 ad 7, hoc est, assis ad septuncem, dicitur superquinquipartiens septimas; in qua locutione numerale septimas distincte commonstrat, cujusmodi partibus aliquotis antecedens consequentem excedit; quinque verò denotat quot ex ejusmodi partibus ipsum excedit. Nec absimiliter in cæteris. Verùm (ut diximus) observari debet exceptio, quod antecedentis supra consequentem excessus non debet ullo modo partem unam aliquotam constituere; vel quod unitati subnexa fractio minimis terminis prolata non debet unitatem admittere loco numeratoris: tunc enim ratio non superpartiens erit, prout hinc distinctim accipitur, at superparticularis. Ut v.g. assis ad dodrantem ratio (vel numeri 12 ad 9) non secundùm hujus divisionis institutum,

&

Pag. 31. & τῷ τ τεχνολογίας καλλιπλίαν, ut loquitur Nicomachus, dicetur ratio ſuperpartiens, at ſuperparticularis, ſeſquitertia, quoniam as dodrantem excedit unâ dodrantis parte tertiâ, hoc eſt, 3 unciis. Quamvis ſecundùm rei veritatem, hác limitatione ſepoſitâ, dici poſſit hæc ratio ſupertripartiens nonas, quatenus 12 ſuperat 9 per 3, quæ eſt $\frac{1}{3}$ dodrantis; quæ fractio æquipollet ipſi $\frac{1}{3}$. Verùm exigit harum rationum diſcrimen, ut denominatores ipſas diſtinguentes efferantur terminis ſimpliciſſimis & omnium minimis; alioqui vel ipſa ratio multiplex cum ſuperpartiente quodammodo coincidet; nam inſtando, ratio 9 ad 3 verè dici poteſt ſupersextipartiens tertias, quia 9 excedit 3 ſex partibus tertiis ipſius 3, hoc eſt, 6 unitatibus; ſed liquet multò ſimpliciùs & commodiùs hanc rationem enunciari, dicendò quòd 9 ſit multipla, tripla nempe τῶν 3. A Græcis autem hæc ratio vocitatur λόγος ἐπιμερὴς, quaſi parti partem adjiciens; quoniam antecedens non unâ ſolâ parte aliquotâ conſequentem excedit, at præter hanc aliâ quâdam, aut aliis partibus. Ut 5 continet 3 ſemel, & ejus duas quintas, hoc eſt, unam quintam & alteram inſuper quintam; & 11 ſuperat 6 ejus parte dimidiâ (3), & tertiâ (2); ſcilicet $11 = 6 + 3 + 2$: (ita vocem ἐπιμερὴς expono, propter difficultatem quandam mox attingendum, quæ ex hujuſmodi tantùm interpretatione videtur ſolubilis). Hinc & hujus rationis ſpecies ita nominantur, Λόγος δὶς ἐπίτριτος, δὶς ἐπιπέμπτος, τρὶς ἐπιτέταρτος, τρὶς ἐπιδέκατος, & in ſimilem formam. Puta ratio quincuncis ad quadrantem

tem (hoc est, numeris 5 ad 3) dicitur δὶς ἐπίτριτος, quia 5 continet 3 semel, & ejus duas partes tertias, vel ejus tertiam partem bis; & ratio numeri 13 ad 10 est τρὶς ἐπιδέκατος λόγος, quia 13 continet 10 semel, & ejus præterea decimam partem, unitatem nempe ter, ac in reliquis consimili pacto. Adnoto tamen Nicomachus aliter compingit harum rationum nomina; nam ἐπιμερεῖς λόγους dividit primùm in ἐπιδιμερεῖς, ἐπιτριμερεῖς, ἐπιτετοιμερεῖς, &c. ex prædictarum fractionum numeratoribus; tum harum rationum singulas ex earundem denominatoribus subdividit, ut puta ἐπιδιμερῆ in ἐπιδίτριτον, ἐπιδίπεμπτον, ἐπιδιέβδομον, &c. & ἐπιτριμερῆ in ἐπιτριτέταρτον, ἐπιτριπέμπτον, &c. Hujus autem rationis, quæ secundùm minoritatem opposita est, unà cum ejus speciebus, ex hinc (ut in præcedentibus) facilè intelligitur. Differt enim quoad rem solâ terminorum transpositione, quoad appellationem tantùm vocem sub vel ὑπὸ præfigendo; subsuperpartiens, subsuperbipartiens tertias, quartas, decimas, &c. ὑπεπιμερὴς, δὶς ὑπεπιμερὴς, δὶς ὑπεπίτριτος, τρὶς ὑπεπιτέταρτος, &c. quare nil attinet his diutiùs immorari. Et hæ quidem tria sunt simpliciorum rationum genera, cùm antecedens consequentem non nisi semel continet. Restant è prima (multiplice) cum reliquis duabus (superparticulari & superpartiente) quodammodo conjuncta resultantes alter ꝛ duæ, multiplex superparticularis & multiplex superpartiens; ac his inversæ. Cùm scilicet antecedens consequentem pluries includit, & unicam insuper partem ejus aliquotam (ut dodrans continet 4.

tri-

trientem bis, & ejus præterea quartam partem) dicitur horum terminorum ratio generaliter multiplex superparticularis, specialem autem in exemplo proposito ratio dupla sesquiquarta: & sic in aliis. Hujúsque ἀνπίστροφος ratio, numeri 4 puta ad 9 dicitur in genere submultiplex superparticularis, in specie subdupla sesquiquarta. Græcis pari modo prior πολλαπλασιεπιμόριος, posterior
5. ὑποπολλαπλασιεπιμόριος, nuncupatur. At cùm antecedens consequentem pluries continet, ampliúsque plures unà partes ejus aliquotas (ut bes continet quadrantem, vel numerus 8 numerum 3, bis, & duas ejus partes tertias) ita se habentium terminorum ratio dicitur generatim multiplex superpartiens, speciatim in exemplo proposito dupla superbipartiens tertias: & ad hunc modum in reliquis. Hujus item inversa, veluti numeri 3 ad 8, dicitur in genere ratio submultiplex superpartiens, in specie subdupla superbipartiens tertias. Græcis itidem simili pacto prior majoritatis ratio dicitur πολλαπλασιεπιμερὴς, posterior (minoritatis) ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς. Nec his existimo satis liquidò manifestis ulteriùs insistendum. Ita rationum effabilium genera (quinque majoritatis & illis opposita minoritatis totidem) utcunque recensuimus & exposuimus breviter; nec ulla datur per numeros exprimibilis inæqualitatis ratio, quæ non ad harum aliquam redigatur; quatenus omne quantum majus continet minus aut aliquoties perfectè adeóque multiplex est ejus (& hoc illius submultiplex) aut semel & ejus unicam partem aliquotam, adeóque superparticulare

culare est ejus (& hòc illius subsuperparticulare); vel semel & plures ejus partes aliquotas, unde superpartiens est ejus (& hoc illius subsuperpartiens) vel pluries & unicam ejus partem, quare multiplex superparticulare dicetur (& hoc illius submultiplex superparticulare) vel pluries demum & plures partes aliquotas, quamobrem id hujus erit multiplex superpartiens (& hoc illius vicissim submultiplex superpartiens) neque rei natura plures admittit continendi modos, adeò perfecta est hæc enumeratio. Attamen apud Theonem Smyrnæum reperio, præter hasce species aliam adnumerari, quam simpliciter effabilem esse dicit, ejúsque terminos habere rationem numeri ad numerum, sed à prædictis distinctam; quam ideò nomine designat ἑτέρως λόγου· &, Ἀριθμὸς (inquit) πρὸς ἀριθμὸν λόγος ἔστιν ὅταν ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάττονα ἐν μηδενὶ εἴη τῶν προειρημένων λόγων. Exempli loco subjicit rationem quæ versatur inter terminos harmonici intervalli, quod λεῖμμα dicitur, habentes se majorem cum minore comparando, ficut 256 ad 243: Καθὰ (inquit) δεικτέον ἐστὶν ὁ τὸ λεῖμμα περιέχων φθόγγος λόγος ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ἔχων τοὺς ὅρους ἐν ἐλαχίστοις, ὡς ὁ σνς πρὸς σμγ. Hunc sectatus Meibomius, in dialogo de proportionibus (an alios veteres nescio, saltem hunc) *Porrò*, inquit, *& hoc monendum numeri ad numerum rationem dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum, cujus rationis est limma in harmonicis contentum bis minimis numeris* 256 *ad* 243. Quod ob dictum ita vapulat, *Omnino lommiâsse videtur.* Non immeritò quidem id,

Cap. 28.

Cap. 22. 28.

juxta

juxta rei veritatem & rationis ſuperpartientis nomen intelligendo ſecundùm vulgarem acceptionem. At non ſolus Meibomius è ſuo cerebello, ſed Theonem (ut vidimus) nactus contubernalem, & ejus afflatus authoritate dormitavit. Quid igitur ipſe Theon, an erravit? Videtur quia ratio limmatis eſt planiſſimè ſuperpartiens, nempe ſupertredecupartiens ducenteſimas quadrageſimas tertias; nec igitur à prædictis diſtincta. Nodum hunc aliter expedire nequeo, nec ab errore Theonem eximere, quàm dicendo Theonem, & alios fortaſſe vetuſtiores Mathematicos, rationem ἐπιμερῆ rectiùs intellexiſſe, pro tali ſolummodo ratione, cujus antecedens ita conſequentem excederet, ut reſiduum dividi poſſet in duas partes ſimplices conſequentis aliquotas (ſimplices appello quarum numerator eſt unitas) eo pacto quo ſicut oſtendi priùs comparando 11 cum 6, reſiduum 5 continet 3 & 2, quorum 3 eſt una dimidia pars, & 2 una tertia conſequentis 6. Unde dicta videatur hæc ratio ἐπιμερὴς, ex mente ſaltem Theonis, & ex interpretatione τῆς λόγου ἐπιμερῶς quam ille tradit. Juxta quam acceptionem limmatis ratio non erit ἐπιμερὴς: nam 13, exceſſus numeri 256 ſuper 243, divi nequit in duas partes ſimplices aliquotas conſequentis 243, ut experiendo conſtabit. Bullialdus aliud exemplum ſubjicit numeri 29 ad 23, difficultatem hanc aut non advertens omnino, vel conſultò diſſimulans, & Theonis errori, ſiquidem error fuit, ſubſcribens. Nam numeri 29 ad 23 ratio eſt planè ſuperſextipartiens vigeſimas tertias, accipiendo rationem ſuperpartientem modo

Ad cap. 22. The. Smyr.

modo communi. Sed de hac re satis. Potuissem adjecisse regulas investigandi terminos quotlibet harum omnium jam expositarum rationum; at præterquam quòd audientium intelligentiæ vix accommodari posset hoc, & non admodum utile foret, & multa verba deposcens charissimi temporis nimium devoraret; adeat, si cui volupe est hæc ultrà prosequi, Clavium in præcedaneis ad V elementum, vel è vetustioribus Nicomachum in Arithmeticis. Ego jam conquiesco.

LECT. V.

RAtionis in præcedentibus naturam exposuimus, & percensuimus species: ad ejus proximè accidentia quædam excutienda devenio. Accidit autem rationibus juxta vulgarem loquendi modum, quantorum ad instar, addi & subtrahi, augeri & imminui, protrahi & contrahi, multiplicari ac dividi, inter se secundùm æqualitatem & inæqualitatem comparari; quorum ultimum cùm præcipuum sit in se, reliquisque penitus intelligendis necessarium, ut & toti rationum doctrinæ illustrandæ de eo primùm disquiremus. Ita tamen ut meâ referat præfari rem aggredi me subtilissimam & intricatissimam, seu rei naturâ, sive tractantium culpâ densissimis nebulis involutam, quibus ut omnino liberetur, non est quòd mea tenuitas aut speret aut spondeat, præsertim cùm difficillimum experiar obversantes, hæc seriâ me-

meditatione perpendenti, cogitationes aptis verbis enunciare, clarâ methodo digerere. Integrum quinquennium impendiſſe ſe profitetur M. Meibomius huic ſpeculationi, neque præter leviculos quoſdam criticiſmos ſani quicquam aut ſolidi videtur elephantinus ille partus in lucem protuliſſe. Diutiùs, opinor, & graviùs eidem incubuit (an ferè ſuccubuit dicam?) maximus vir, & recentium Geometrarum nulli poſthabendus Gregorius Vincentius, attamen ut rem meo judicio reliquerit, haud minùs obſcuram quàm invenerit, fuſiſſimè licèt & elaboratiſſimè pertractatam. Quid igitur à paucularum horarum ſtudio, quid (ut cætera taceam), ab hac extemporanea pene ſcriptione circa materiam ejuſmodi contumaciter perplexam meritò poſſit expectari? Sed obſequendum eſt nihilominus inſtituto noſtro; pergendum eſt in itinere ſuſcepto, prærupto quantumvis & impedito; ſuggerendum eſt aliquid utcunque crudiùs & aſperiùs à maturiori judicio veſtro excoquendum & elimandum. Hæc prælocutus, ad opus accingor atque certamen multiplex. Imprimis autem decidenda venit quæſtio, dicendorum intelligentiæ maximopere conducens. Quum nempe rationes, haud ſecus quàm abſoluta quævis quanta, dicantur inter ſe comparari, ſic hæc æqualis ſit aut inæqualis illi; quum componi, reſolvi; addi, ſubtrahi; multiplicari, dividi; poteſt ambigi quo ſenſu debeant hæc intelligi, num proprie vel improprie: vel, an rationes accuratè loquendo res quantæ ſint, quantitatis affectionibus iſtis, æqualitati, inæqualitati, rationi, compoſitioni, diviſioni,

sioni, reliquisque propriè subjacentes. Pleríque recentiores in hâc sententia versantur, ídque disertis verbis asseverant, rationem esse genus peculiare quantitatis, eíque quantitatis attributa jure competere: hoc Vincentius toti suarum proportionalitatum doctrinæ substernit, eíque succinit eruditissimus ejus consocius Tacquetus; inculcat hoc D. Hobbius adversario suo doctissimo nihil reclamante; agnoscit idem egregius ille Borellus, *Agimus* (inquit) *jam de nova specie quantitatis.* Quid Mersennum, Meibomium, alios referam, cùm uno ore videantur omnes, præsertim qui circa proportionalitatis doctrinam innovare studuerunt, huic astipulari sententiæ? Nihilominus audendum est mihi tot & tantis viris obniti, tam illustri authoritati ἀνθελκέτειν. Veritas exigit (saltem existimata mihi) à tam validis hostibus aliquale patrocinium: hæc certe sententia mihi non solùm falsa, sed & admodum noxia videtur, quippe quæ controversias aliquam multas inutiles genuerit & foverit, plurimasque (sicuti mihi videtur) confusiones, ἀκυρολογίας, errores invexerit in proportionum doctrinam. Plusculæ, arbitror, resecabuntur lites, difficultates auferentur, evitabuntur errores, & tenebræ discutientur, asserendo rationem non esse genus quantitatis, nec quantitati subjacens quid, & quantitatis attributa neutiquam propriè, per se, directè, nec aliter quàm per κατὰ χρῆσιν aut μεταφυμίαν quandam ei convenire. Et sane mirum videatur aliter quemvis censuisse; quum enim ratio sit & agnoscatur pura puta relatio, quomodo veluti transire potest

Ad 7. def. lib. 3.

in aliam categoriam, & genus aliquod conſtituere quantitatis? Quum nil ſit aliud quàm duorum quantorum reſpectus in quantitate fundatus, quomodo poterit ipſa concipi res ex ſe quanta, vel quantitati ſubjacens? Quum ſit abſtractè relatio, quomodo concretè dicatur relata? Annon hoc eſt res abſolutas cum reſpectivis, nomina concreta cum abſtractis confundere? Hactenus docuerunt Logici relationes ineſſe, tribui, niti rebus abſolutis; res autem abſolutas relationibus inhærere, vel accidere nemini dictum, opinor, vel auditum Logicæ ſtudioſo. Sicut nec relationes ipſas referre, reſpectus ſe reſpicere, habitudines hoc vel illo modo ſe habere, diſtantias diſtare, ſimilitudines aſſimilari, comparationes inter ſe conferri, dictu plauſibile, conceptu poſſibile videtur. Cùm e. g. dicitur, hæc ratio major eſt illâ, primùm (ex adverſariorum ſententia dictum id propriè ſumentium) tribuitur rationi magnitudo quædam, ſeu quantitas, inhærens vel accidens rationi; propter quam refertur ad aliam, vel in qua fundatur ejus ad aliam ratio; tum interpretativè conſequentérque dicitur, inæqualitas hæc inæqualis eſt illi inæqualitati, hæc majoritas major eſt iſtâ majoritate: ita res abſolutæ relationibus inerunt ac innitentur, relationes attribuentur relationibus; concretæ voces de paronymis ſuis, & ejuſdem familiæ vocibus abſtractis prædicabuntur. Porrò quâ causâ quóque jure, rationes inter ſe comparato ſibi pronunciet aliquis æquales propriè vel inæquales, & inter ſe rationem obtinere, poſſit eâdem causâ æquóque jure, ra-

rationes istarum rationum conferendo æqualitatem iis & inæqualitatem novîque generis adeò rationem assignare; quin & harum ulteriùs rationum alias rationes statuere, ac ita nunquam desituro ad infinitum progressu. Si ratio quantitatis genus sit, à magnitudinum comparatarum quantitate distinctum, & rationem ipsa sortitur, hæc nova ratio pari jure novum quantitatis genus erit, & rationis hujus ratio genus alterum distinctum constituet, & sic infinita quantitatum genera lucrabimur, hactenus nemini puto vel in somnis cogitata, neminique sano cogitanda. Verùm meritò videtur & respuitur à Philosophis hujusmodi nimium liberalis & facilis entium multiplicatio, minimè necessaria neutiquam comprehensibilis. Addo, quòd nulla rationis cujusvis quantitas immediatè discerni, vel per se potest æstimari; non sensum incurrit, non per effectus se prodit, non ullâ certâ ratione colligitur aut comprobatur; ut posthac ostendere conabimur. Itaque, gratis supponitur & affirmatur, eâdemque facilitate rejici potest ac abnegari. Sed contra primum nostrum discursum objici posse video sic instando percontandóque: relatio patris ad filium, annon similis dici solet, & verè dicitur relationi principis ad subditum, ducis ad militem, pastoris ad gregem? Ac ità relationi relatio, paternitati similitudo tribuitur ac inest. Reponto breviter primò, saltem ejusmodi relationes paternitas & similitudo sunt admodum diversæ naturæ, neque cùm dicitur paternitas est similis, committitur ejusmodi absona reduplicatio, nominúmque concretorum cum abstractis con-

fusio, qualis incurritur dicendo, similitudo est similis, vel inæqualitas est inæqualis. Sed respondeo potiùs secundò, cùm dicitur paternitas est similis principatui, ista similitudo non in ipsis fundatur relationibus, nec in aliquo quod iis inest, sed in rebus absolutis, quibus & ipsæ dictæ relationes innituntur; vel in aliis rebus absolutis quæ consequuntur & exurgunt ab illis fundamentis: quia scilicet gignere filium & populum aggregare, regere familiam & civitati præsidere, similia sunt; quoniam affectu prosequi, consilio juvare, pœnis coercere; curâ ac operâ prodesse, providere, tutari; reverentiam, obseqnium, gratitudinem sibi debita exigere, communia sunt patri principíque; hinc pater & princeps absolutè multis de causis & multis nominibus (ut talibus affecti qualitatibus, agentes talia vel patientes) similes dicantur: unde per translationem nominis ipsæ relationes, paternitas & principatus, similes prædicantur; non quia σχέσεις hæ strictâ proprietate referuntur ad se (quomodo enim intelligi poterit, cùm paternitas & principatus nil sint aliud quàm τὸ esse ad alia, convenit ipsis alterum esse ad aliud; ut nempe dicatur, hoc esse ad aliud est ad aliud?) Sed quia relationibus istis perpetuò conjunguntur istiusmodi qualitates aut actiones, propter quas ipsi termini relati verè similes habeantur. Igitur hæc similitudinis relatio non tam inhæret dictis relationibus, quàm ipsas comitatur, ipsísque propter hanc accomitantiam attribuitur. Non absimile quid contingit in hac quam prosequimur materia: quæ nempe quantis absolutis revera con-

convenit æqualitas aut inæqualitas, aut ſpecialis quælibet ratio, ipſorum rationibus adſcribitur. Quum e. g. ratio ſextupla dicitur major reſpectu, & quidem dupla, rationis triplæ, nil ſignificatur aliud, quàm rem denominatam numero ſenario majorem eſſe, in dupla ratione majorem, re denominata numero ternario; vel antecedentem unius rationis æquare duplum rationis alterius antecedentem; propter quem inæqualitatis modum una ratio, quaſi metonymicè dicatur alteri taliter inæqualis. Quòd ſiquis attentè rem animo pentitet, agnoſcere poterit, etſi veriſſimè dicatur & non impropriè, ſextuplum tripli duplum eſt (concretas nempe voces adhibendo, adeóque res quaſdam abſolutas involvendo) tamen nec verè nec propriè nominibus abſtractis utendo, dici ſextuplicitas eſt dupla triplicitatis. Certè ſextuplum ſemper dividi poteſt in duo tripla; triplum duplicari poteſt, & bis accipi, ſic ut ſextuplum componat. Aſt ipſa ſextuplicitas videtur eſſe quid indiviſibile, neque triplicitas apta eſt compoſitionem ingredi. 3+3 exæquat 6; at eſſe triplum+eſſe triplum (hoc eſt, triplicitas+triplicitas) qualem ſummam efficiat non aſſequi poſſum cogitando. Triplex eſt trihorium horæ, triplex triennium anni, iſta triplicitas huic triplicitati adjuncta, quæ Mathematicè computabilem ſummam efficiant, equidem non capio; video potiùs ex duabus iſtis. Metaphyſicè duabus, triplicitatibus ſextuplicitatem nullam conflari vel emergere. Cæterùm ut hæc dilucidiùs pateant, & quòd nulla poſtulet neceſſitas diſtinctam aliquam ratio-

nibus quantitatem assignari, circa rationum συγκρίσεις nonnulla pressiùs advertemus. Ad-
1. verto nempe primò, Quòd nullæ rationes inter sé comparari possunt, sicut innotescat aut æstimabilis reddatur ista, quæ adversarii pertendunt, ipsarum ratio, nisi priùs ad commune consequens reducantur, immediatè nimirum aut mediatè, actu & explicitè, vel virtualiter & implicitè. Scire v. g. nemo potest aut concipere, quænam ratio, num numeri 12 ad 3, vel 4 ad 2 major sit, aut quomodo major, nisi considerando quòd 12 ad 3 taliter se habet ut 4 ad 1, & 4 ad 2 sicut 2 ad 1. (Vel unitatis loco quodvis aliud substituendo commune consequens, puta 5, considerando quòd 12. 3 :: 20. 5 & 4. 2 :: 10. 5). Quibus consideratis atque perspectis, tum demum ex antecedentium, in hisce novis æquipollentibus rationibus, collatione dignoscitur ipsarum rationum inæqualitas & ratio (quæ dicitur). Unde provenit hoc, quàm exinde, quòd rationes ipsæ nullam ex se quantitatem habent ullatenus imaginabilem, distinctam à terminorum suorum quantitate, nullam propriè dictam inæqualitatem; at saltem, postquam commune consequens obtinent, propter antecedentium inæqualitatem inæquales & ipsas denominari?
2. Pariter adverti poterit secundò, quòd cùm duarum quarumcunque rationum termini sunt heterogenei, nullatenus illæ comparari possunt aut æstimari, nisi priùs ad commune genus aliquod revocentur. Proponantur e.g. duo pondera & duo tempora, quænam sit major ratio duorum istorum ponderum, an binorum temporum, dignoscatur aliquatenus;

nus; nec alio ferè quàm hoc pacto: Adſumatur aliquod quantum, cujuſvis generis pro lubitu tuo: (ſed commodiſſimè plerunque propter ſummam rectarum linearum ſimplicitatem, & capacitatem exprimendæ cujuſvis rationis, adſumetur recta linea) adſumatur, inquam, recta quævis linea, quòd ſi fieri poſſit ut primum pondus ad ſecundum, ita linea quævis ad lineam acceptam; item ut primum tempus ad ſecundum, ita quædam linea ad eandem itidem aſſumptam; tum ſicut ſe habet prior linea ſic inventa ad ſecundam ita repertam, taliter habere ſe dicetur ratio ponderum ad rationem temporum; dicetur, inquam, idcirco quia dictæ lineæ taliter ſe habent, ab ipſarum ratione denominationem hanc mutuando. Poſſet commodiſſimè loco lineæ numerus adſumi, modò conſtet propoſitas rationes ponderum & temporum numeris explicabiles fore; at ſi non conſtet, aut quod multoties evenit, reipsâ non contingat hoc, numerus ad hanc σύγκρισιν ineptior eſt. Unde minùs rectè, quod obiter adnoto, vir eximius, in opere Arithmetico numeris omnibus abſoluto, pronunciâſſe videtur omnes rationes exiſtere in genere numeroſo: quaſi verò reliqua quanta, numerorum omni conſideratione ſeclusâ, rationem non obtinerent, eámque ſatis notabilem atque tractabilem? Quamobrem præſertim ſit ejuſmodi ratio, modo quolibet in genere numeroſo, quæ cùm poſſit aliis terminis exhiberi, numeris tamen nullatenus exprimi poſſit? Ut & quòd ex hinc infert, veritatis expers videtur, univerſam nempe rationum doctrinam, Arithmeticæ potiùs quàm

Pag. 226.

Geometricæ ſpeculationi convenire: quid enim, annon pleraque de rationibus adhuc inventa vel tradita planè generalia ſunt. & quantis ex æquo cunctis conveniunt? Et ejuſmodi ſaltem rationes, quæ numeris exprimi nequeunt, Arithmeticæ ſpeculationis limites egredientur, quales innumeræ ſunt, quibus elementi quinti theoremata non minùs quàm Arithmeticis adaptantur. Sed hoc ἐν παρόδῳ, neſcio num alias pleniùs elucidandum. Conſequenter ad hæc advertatur
3. tertiò, quòd nulla ratio ſeorſim & per ſe poteſt æſtimari vel comprehendi, nec ei ullam determinatam quantitatem peculiariter apta nata eſt exprimi ſeu repræſentari, ſed per omnes, vel unamquamvis indifferenter; nec ideo cuivis abſolutæ quantitati ſubjacet, qualis enim illa quantitas foret, per omnia quantorum genera deſultans atque pererrans? Et ſi nullam ex ſe quantitatem intelligibilem habet, quomodo cum alia ratione collata deprehendetur habere? Quo pacto nullâ ratione per ſe comprehenſibilium quantorum feliciter inſtituetur comparatio, notáque reſultabit relatio quantitatum ignotarum? Quinimo cum alia ratione collata ratio non niſi vagam & arbitrariam ſortitur quantitatem; prout enim commune conſequens ex arbitrio varium accipitur, ita rationum collatarum quæ dicuntur quantitates evariantur. Deſultoriam igitur & indeterminatam quantitatem habent, ſiquam habent, hæ rationes; hoc eſt, nullam. Eſt enim aliquid determinatè, quicquid eſt; quod utique eſt, nuſquam eſt. Vidit hoc, & palam agnovit, luculentéque declaravit acutiſſimus

mus Vincentius, at seu verborum ambiguitate delusus, seu spe novæ conendæ scientiæ nonnihil elatus, aliorsum rapuit. *Respondeo* (inquit) *verum esse, si ratio quæ in numeris exprimi nequeat, solitariè sumatur, denominatorem ejus exhiberi Geometricè non posse* (imò verò interpono, semper exhiberi potest, sumendo quodvis quantum pro consequente, quod eodem munere fungetur, quo communiter unitas defungitur in rationum effabilium denominatoribus exhibendis; neque rationum numeris effabilium quoad hoc peculiare quicquam est) *quòd si* (pergit Vincentius) *binæ vel plures fuerint datæ rationes, assignari poterunt singularum denominatores, qui nimirum demonstrent qualis inter rationes ipsas proportio intercedat, atque hoc non tantùm à duabus cer is lineis præstabitur, sed à quibuscunque aliis, quæ prioribus proportionales existunt.* Sic ille. Cùm igitur præter hujusmodi denominatores, nullæ possint assignari rationum quantitates, & si simpliciter accepti possint esse quamlibet varii, non erit ulla rationum absolutè determinata quantitas. At Vincentius (ut dixi) verborum ut puto quo undam obscuritate turbatus, aliò deflexit hæc. Quamobrem adverto quartò, quòd fundamentum unicum, cui innititur, e quo deducta videtur & enata de rationum quantitatibus & rationibus, ista quam oppugnamus doctrina, est usitatus iste loquendi modus: hæ duæ magnitudines sunt æquè inæquales, ac illæ duæ; hæ magis aut minùs inæquales sunt quàm illæ, inde rationum quantitates & rationes colligunt dari. Si major est hæc ratio illâ, ergò quantæ sunt, ergò rationem 4.

hæc

hæc habet ad illam. *Ex quo* (inquit D. Hobbius) *intelligitur rationem tam exceſsûs quàm defectûs eſſe quamitatem* (eſſe quantam opinor vult dicere) *quippe quæ ſuſcipit majus & minus* (intelligit, credo, quæ major dicitur & minor). Et Vincentius, in prima demonſtratione libri de proportionalitatibus Geometricis, ſic argumentatur; *Ratio eſt mutua quædam antecedentis ad conſequens habitudo, ſecundùm exceſſum, & defectum, & æqualitatem. Cùm igitur unius rationis antecedens magis excedat conſequens, vel ab eodem magis deficiat, quam alterius rationis antecedens ſuum excedat conſequens, vel deficiat ab eodem, manifeſtum eſt unam rationem majorem minorémve eſſe alterâ, planè ut una quantitas alterâ major minórve eſt.* Sed ad hunc plauſibilem diſcurſum repono, quoad loquendi formulas uſu receptas ſpectandum eſſe, non quid verba ſonant, at quid loquentes intelligunt. Nihil autem aliud hujuſmodi verbis concipi poſſe, ſatis declaratum eſt nuperrimè, quam ad commune conſequens reductis quantorum quibuſcunque rationibus, illarum antecedentes ſe taliter excedere, vel taliter deficere, vel ſibimet exæquari. Nec enim, ut ipſi neceſſe habebunt fateri, poſſunt æſtimari, vel inter ſe comparari rationes ullæ, niſi talis fiat reductio; poſtquam verò reducuntur, haud aliter quam ex antecedentium collatione dignoſcitur aut denominatur hæc, quam ipſi nominant, ratio. Quapropter & ex ipſorum mente ac uſu vocantur antecedentes iſti rationum denominatores. Ergo nihil eſt neceſſe per locutiones antedictas aliud quicquam præter antecedentium æqualitatem

aut

aut inæqualitatem (hoc est, ipsorum rationem) designari vel intelligi. Nec igitur valet ab hisce loquendi formulis deducta argumentatio. Dixi nihil est necesse, sed neque de facto quicquam aliud concipitur, unde quo coronidem imponam huic dissertationi, adverto quintò, quicquid vulgò rationibus tribuitur, id verè tantùm & proprie rationum denominatoribus, hoc est, ipsarum ad idem consequens redactarum antecedentibus, convenire. Quam illis adsignant quantitas, nihil est aliud quàm denominatorum quantitas & ratio; quum ipsas videri volunt addere vel subtrahere, non nisi denominatores istos addunt vel subtrahunt; sed & cùm ipsas multiplicant vel componunt, partiunt aut resolvunt, eadem res est. Liquebit hoc propositiones Vincentianas, egregio sanè nisu contextas, attentiùs expendenti; quas quidem is universaliter proponit, & secundùm definitiones ac hypotheses suas ritè demonstrat, at si quis eas speciatim veluti de numericis rationibus prolatas accipiat, ejus totam doctrinam huc recidere deprehendet, ut fractionum quasi numeralium, aut quotientium divisione compertorum, additio & subtractio, multiplicatio ac divisio, quoadque proportionem comparatio, indagetur atque tradatur. Quod autem in Arithmeticis est numerica fractio, vel divisionis quotiens, id in Geometria est denominator rationis cujuspiam, hoc est magnitudo quæpiam ad homogeneam sibi magnitudinem, unitatis loco habitam, sic affecta, prout fractio vel quotiens numerica refertur ad unitatem. Quare nihil aliud prosequi videtur Vincentius, 5.

tius, quàm fractiones Arithmeticas, iſſque reſpondentes rationum Geometricarum denominatores; quibus congruentia quæque ſymptomata rationibus ipſis aſcribit. Sint e.g. duæ rationes numericæ 3 ad 5, & 7 ad 3; harum denominatores erunt fractiones $\frac{3}{5}$ & $\frac{7}{3}$ (quatenus $\frac{3}{5}$ ad 1, ita ſe habet ut 3 ad 5; & $\frac{7}{3}$.1::7.3) vel reducendo dictas fractiones ad communem denominationem, erunt iſtarum rationum denominatores numeri fracti $\frac{9}{15}$ & $\frac{35}{15}$. Has igitur fractiones cùm addiderit ſibimet, aut unam ab alia ſubduxerit; cùm unam per alteram multiplicârit aut diviſerit, & cùm ipſarum proportionem exhibuerit, præ ſe fert ipſas dictas rationes addidiſſe vel ſubtraxiſſe, multiplicâſſe vel diviſiſſe, vel ipſarum rationem exhibuiſſe. Non igitur ille vir egregius tam novam circa proportiones ſcientiam condidiſſe, quod cenſet Tacquetus, at veterem ante perſpectam doctrinam alio modo, nec eo nimis appoſito, contexuiſſe, noviſque vocabulis enunciâſſe videtur; quam tamen à ſe repertis compluribus theorematis inſigniter locupletavit. Commune verò quod diximus, eſt illi cum cæteris hanc de rationum rationibus & quantitatibus doctrinam amplexantibus, rationes ſcilicet, dum numeros attrectant, cum numericis fractionibus confundere, dum alias rationes conſiderant, tanquam ſuis denominatoribus eaſdem tractare. Quod nonnunquam apertè diſertiſque verbis faciunt, imprudenter eò delabentes, ſæpiùs autem verbis declinantes reipsà incurrunt. Notat hoc & ſæpè taxat Hobbius in antagoniſta ſuo, ſed nec ipſe modò ſibi conſtet immunis

ab

ab hac culpa; idem enim est rationem rationibus tribuere, ac rationes cum denominatoribus suis easdem reputare, vel saltem nihil & insignificanter loqui; hoc enim aut nihil planè quicquam concipiunt. At sufficiant hæc quadantenus exponendæ confirmandæque sententiæ nostræ, quòd scilicet rationes nullam propriè dictam quantitatem habent; neque quoad rationem inter se verè comparantur. Unde nonnulla consectaria deducemus. Hinc primò clarè faciléque decidetur quæstio de rationum, quam appellat Euclides compositione συνθεσις, num rectiùs pro rationum additione sit habenda, vel pro ipsarum multiplicatione: nam è dictis quoad rem ipsam rationibus, utpote quantitatis expertibus, neutrum convenit, nec addi nec multiplicari; quoad verò loquendi modum, quia cùm componi dicuntur rationes, ipsarum denominatores multiplicantur, manifestum est rectiùs dici rationes multiplicari quàm addi. Sicut & cùm denominatorum unus alium dividit, rectiùs operatio talis dicetur rationis divisio quàm subtractio. Quamvis obtinuerit, ut illa prior operatio dicatur πρόσθεσις, hæc posterior autem * ἀφαίρεσις. Secundò, radicitùs hinc evellitur, aut planè decernitur controversia, quam agitant nonnulli, quámque videtur † Mersennus excitâsse; num ratio scilicet æqualitatis nihilum referat, aut exæquetur nihilo, ratio majoris æqualitatis attollatur supra nihilum, ratio minoris inæqualitatis infra nihilum deprimatur. Nam ex

1.

* *Apud Ptolemæum, lib. 1. συντ. & Theonem isthic.*

2.

† *In Præfat. ad Cogit. Physico-Mat.*

ex vero cùm nulla ratio quanta sit, intercidit hujusce quæstionis fundamentalis hypothesis, ipsáque simul collabitur & ruit. At ex hypothesi quòd denominatorum affectiones rationibus suis adjudicandæ sunt, evidentissimè liquet etiam minoritatis & æqualitatis rationes supra nihilum assurgere. Semper enim minoris rationis denominator est aliquod quantum consequente minus; adeóque in Arithmeticis pars vel fractio minor unitate. Æqualis verò rationis denominator consequenti semper adæquatur, & unitate signatur in Arithmeticis. Nec amplius quid ad hujusce quæstionis decisionem requiratur.

3. Tertiò, facillimè refelluntur hinc quæcunque Meibomius, adversus antiquos juxta ac recentiores Geometras, stylo certè nimisquam inverecundo, disputavit ac adservit. Qualia sunt, quòd ratio submultiplà sit eadem rationi multiplæ, propter idem ab æqualitate διάστημα. Præterquam enim quòd non idem sit διάστημα, nam longissimè distant defectus & excessus, differentia negativa ac positiva, satis liquebit hasce rationes ad commune consequens exigendo (quod pro rationum collatione toties necessarium monuimus) subduplæ denominatorem minorem fore (quadruplà ratione minorem) denominatore rationis duplæ. Sit puta commune consequens 2, igitur antecedentes erunt 1 & 4, unde constat propositum. Item, cùm colligit rationes excessûs & defectûs inter se non posse comparari; nam æquè comparantur hæ, ac aliæ quævis, denominatorum interventu. Etiam, cùm solummodo rationem minorem asserendam statuit è majore;

(rectiùs minorem per majorem dividi dixiſſet, ut præmonitum eſt) in eo liquidiſſimè fallitur: quid enim impedit minoris rationis denominatorem dividi per denominatorem majoris, ſeu Arithmeticè ſeu Geometricè? Rurſus, cùm rationem alicujus ad majus, ſubinde majorem eſſe pronunciat rationa ejuſdem ad minus: ut rationem 4 ad 7, majorem eſſe ratione 4 ad 5; adeóque rationis majoris & minoris nomina peram ab omnibus hactenus Geometris uſurpata. Nam ejuſmodi rationes, 4 ad 7 & 4 ad 5, ad idem conſequens revocando, puta ſubrogando pro illis æquipollentes 20 ad 35 & 28 ad 35, liquet 20 minorem eſſe quàm 28, adeóque rationem 4 ad 7 majorem eſſe ratione 4 ad 5. Et univerſim hinc patet quòd & quare majores & minores appellamenta commodiſſimè ſunt à veteribus applicata; quia ſcilicet id quod rei ratio depoposcit, ab antecedentium poſt reductionem quantitatibus legitimè derivata ſunt, à quibus cùm ipſæ rationes indicantur, ac denominationem accipiunt, tum habent omnino quòd ullatenus comparari poſſunt aut comprehendi. Quamobrem & abunde perſpicuum eſt eundem virum nullâ validâ ratione fretum, definitiones Euclideas falli poſtulâſſe. Nam ſi ratio quævis aliâ major eſt, quod ipſe non diffitetur, (& ſi nulla propriè major ſit, quod ego ſentio, docendi tamen causâ nil vetat, nec ego repugno quin aliqua major appelletur) ſi, inquam, aliqua major ſupponatur, ille major jure meritiſſimo dicetur, cujus denominator eſt major, & quæ talis ab Euclide nominatur, egregiéque definitione circumſcribitur, ac diſtinguitur

ab

ab aliis. Eâdem facilitate difflantur, ut autumo, quæcunque vir ille communi Geometrarum sententiæ pugnantia suggessit animo
4. paradoxa. Neque demum molestiam nobis facesset ista tantopere jactata λογομαχία, circa rationem multiplam ac multiplicatam, duplam ac duplicatam, triplam & triplicatam, atque consimiles. Nam e traditis manifestè dilucescet rationem (v. g.) duplicatam, quæ dicitur minimè duplam esse rationis, quacum confertur. Ut ratio numeri 9 ad 1, non est dupla rationis 3 ad 1, quoniam existente jam communi rationum harum consequente, denominator unius 9, alterius denominatori 3 duplato non æquatur. Unde patet istiusmodi rationum multiplicationes ab alia causa nuncupari, posthac commodiùs expedienda. Id solum adjiciam, admisso, quod astruere conatus sum, rationes nullam ex se quantitatem habere, nulla quantitatis attributa sortiri nisi naturalia, quæque debent accepta referre denominatoribus suis, difficultates hujusmodi pleraque statim evanescere, dubia planè tolli vel facilè solvi, lites & rixas pleraque consopiri; quæ nimium haud aliunde quàm ex ambiguitate per falsam istam hypothesin introductâ videntur emersisse. Quamobrem haud abs re duxi quæstionem hanc tam fusè sedulóque ventilare. Cæterùm quia vulgò solent rationes inter se comparari, verbóque tenus æquales, majores, minores haberi; nec scientiarum magistris deneganda videatur licentia, tales voces cudendi ac usurpandi (doctrinæ nempe clarioris & succinctioris gratiâ, modò de re constet, ac errorum occasio præcidatur. Nec enim

enim ego vulgares loquendi modos libenter improbo, ſed genuinos ipſorum ſenſus inveſtigo, nè verba rebus officiant, & per inanes ſonos illudatur veritati) hæc, inquam, cùm ita ſe habeant, & non abſque fundamento quodam atque causâ probabili, locutiones iſtæ pridem admiſſæ ſint, ac dudum invaluerint, quid per illas diſtinctè ſignificetur inquiremus. Quæ nempe ſint æquales, majores, minores rationes (hoc eſt, alio modo breviter nec inconcinnè, rationum comparationes iſtas efferendo, quid ſit analogia, quid hyperlogia (aut prologia) quid hypologia, quomodo definiri poſſint, & à ſe bene diſtingui, proximâ Lectione quæremus; quâ nulla fortaſſe ſubtilior aut gravior apud Mathematicos diſceptatur controverſia. Optimè (quantum res ipſa patitur, optimè) mihi videtur ab Euclide definitiones has eſſe conſtitutas, pleriſque jam ſecus videtur, cúmque nemo ferè non in hoc damnat & deſerit; an juſtis de cauſis & validis ſubnixi ratiociniis hoc fecerint, id examinatis & expenſis quæ dixero penes veſtrum erit judicium ſtatuere. Interim εὐπραγεῖτε.

LECT. VI.

IN præcedente Lectione ſatis aſtruxiſſe videmur rationibus ex ſe, verè propriéque loquendo, nullam quantitatem, nullam rationem competere, nec ideò propter aliquid ipſis inhærens, aut ex ſe conveniens unam alterius reſpectu majorem, minorem, æqualem prædicari; ſed ab abſolutis quantis ad ipſorum rationes hæc derivari attributa. Quia verò pridem invaluit uſus, ut rationes inter ſe ceu quanta abſoluta comparentur; & æqualis, majoris, minoris rationis nomina ſortiantur; & nos locutiones iſtas, inter poſitâ juſtâ cautione, non illibenter admittimus, id proximè ſequitur, ut quo certo ſigno vel indicio dignoſci queat, quando ratio una alteri æqualis eſt, quando major, quandóque minor dici debeat, hoc eſt, quomodo definiri poſſint & diſtingui ratio, major, minor, æqualis, diſpiciamus. Et quidem è dictis ſatis manifeſtè conſequi videtur, ſiquidem duæ rationes homogeneis terminis conſtantes, commune conſequens habeant, illas commodiſſimè definiri poſſe per antecedentium reſpectivam quantitatem, ut æquales nempe rationes dicantur, quarum antecedentes æquantur, & ratio major hæc illâ, cùm hujus antecedens illius antecedentem excedit; & minor hæc illâ, cùm hujus antecedens ab illius deficit antecedente. Verùm cùm id quod accidit plerumque, diverſi conſequentis rationes

ones comparantur, adeóque deficit iſta conditio, liquet aliud indicium requiri, quo rationum iſtarum relatio dignoſcatur; indicium ſcilicet aliquod univerſale, ſufficiens determinandis quibuſcunque rationum habitudinibus inter ſe. Tale vero ſufficiens indicium reperire, magnæ res difficultatis hactenus viſa compertáque eſt; cùm obſtent variæ cauſæ, duæ præſertim diſcrimen inter rationes effabiles & ineffabiles (hoc eſt, quantorum aſymmetria) & terminorum, quibus diverſæ conſtant rationes, ἑτερογένεια. Si rationes enim omnes effabiles eſſent, & inter quantitates tantummodo ſymmetras verſarentur, eodem modo definiri poſſet æqualis ratio, quo numerorum proportionalitas in elemento ſeptimo, per diviſionum nempe quotas æquales; & major minórque ratio per quotorum inæqualitatem reſpectivè: ſed hoc univerſim ſufficere prohibet terminorum, quibus inſunt pleræque rationes, incommenſurabilitas, quo fit ut exquiſitè peragi nequeat diviſio, neque per numeros vulgò notos exprimi poſſit, aut animo clarè concipi modus, quo rationum termini ſeſe reſpiciunt. Terminorum etiam, quibus inſunt aut conſtant comparatæ rationes, ἑτερογένεια modos alios nonnullos (excogitabiles aut etiamnum excogitatos) excludit, quibus alioqui rationum reſpectus univerſaliter utcunque definiri poſſit, ut poſtea forſan oſtendetur. Hinc perdifficile videtur univerſale quoddam indicium exhibere, quo propoſitis duabus rationibus, quarum termini ſint indifferenter ſymmetri vel aſymmetri, homogenei vel heterogenei, de ipſarum æqualita-

te vel inæqualitate, liquidò pronuncietur & certò. Videamus igitur quæ talia indicia Geometræ conati sunt assignare, vel quo pacto rationum hosce respectus definiendos censuerunt. Et quia si deprehendi posset apta rationis æqualis definitio, non difficile sit ex illa rationum inæqualium, majoris ac minoris, definitiones efformare, de rationum æqualitate primò differemus; quæ scilicet anima Matheseôs & nucleus habetur, imò disciplinarum omnium vinculum (Δεσμὸς τῶν Μαθημάτων) à Platone dicitur. Rem itaque tantam velut ex imo fundamento pertractandam ordiemur. Rationis æqualitas unico vocabulo (brevitatis & claritatis causâ) vocitari solet analogia. Quæ vox extra Matheſin vulgò quamvis denotat congruentiam, conformitatem, aut aptam rerum inter se quarumvis correspondentiam; sicut (instando) convenientia sermonis cum regula generali dicitur à Grammaticis analogia; & quæ in ratione quapiam communi conspirant, à Logicis dicuntur analoga. Nempe Græcis ἀνὰ præpositio rerum identitatem, æqualitatem, aut convenientiam innuit qualemcunque. Exempla suggerunt Scripturæ sacræ; Joannis secundo habetur, Ἀνὰ μετρητὰς δύο χωροῦσαι ὑδρίαι· Hydriæ binas metretas capientes æqualiter, aut singulæ binas. Matthæi vigesimo, operarii loco mercedis, Ἀνὰ δηνάριον ἔλαβον· Unusquisque denarium pariter accepêre. Lucæ nono, Κλίνατε κλισίας ἀνὰ πεντήκοντα· Facite discumbant quinquaginta simul, vel in singulo discubitu æquè quinquageni. Neque non apud medicorum filios in pharmacorum

in Timæo.

macorum compositione præscribi, Sumantur horum vel illorum tot talésque mensuræ ana, hoc est, æque, vel singillatim tantæ, ignotum nemini. Simili fere pacto ἀνάλογον dicuntur bina quanta binis collata, quæ λόγον habent ἀνὰ congruè vel æqualiter; hoc est, quæ rationem habent æqualem: abstractéque rationum ipsarum convenientia talis appellatur ἀναλογία. Latinis eadem usitatiùs proportionalitas dicitur, distinctionis gratiâ, quia proportio sæpiùs ipsam rationem τὸ λόγον designat. Quanquam, ut mihi prænonitum, Cicero cùm in Plat. Timæi versione vocem ἀναλογίαν in Lat. transfunderet sermonem, adhibuerit vocabulo proportio. Fabius autem Quintil. ἀναλογίαν per similitudinem bene censuit exprimi: quapropter analogia vel proportionalitas definitur ab Euclide λόγων ὁμοιότης, à Theone Smyrnæo λόγων ταυτότης· melius (etsi non admodum referat) meâ sententiâ diceretur λόγων ἰσότης (cùm quia similitudo verbum est laxiùs & magis ambiguum; & identitas haud optimè quadrat rebus actu diversis, immediatè quà talibus & sub diversorum ratione comparatis; tum quia rationum habitudines aliæ, hyperlogia nimirum & hypologia, non ex dissimilitudine vel diversitate, sed ex inæqualitate denominantur majoritas & minoritas; quia denique rationum æqualium denominatores, à quibus, ut expositum, rationes habent quòd ullatenus inter se comparantur, non iidem aut similes, sed æquales sunt) definitiones autem istæ non sunt οὐσιωδεῖς, rei definitæ certam aliquam essentialem passionem exhibentes, sed tantùm ὀνομαστωδεῖς,

Quintil. lib. V. H.

πωδεῖς, quid analogiæ nomen significet quadantenus indicantes; Euclidi saltem tales sunt, ut ex eo satis patet, quòd definitioni quintæ (rationem scilicet eandem habentium magnitudinum definitioni) subjicit, Τὰ δὲ αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον ἀνάλογον καλείσθω, quæ mera est vocabuli ἀνάλογον explicatio. Mox autem, interjectis solùm inæqualem rationem habentium definitionibus, Ἀναλογία δέ ἐστι λόγων ὁμοιότης. Quamobrem Euclidis mentem haud optimè capit Borellus, cùm existimat eum hanc velut essentialem, & scientificam analogiæ definitionem proponere; cúmque censet ex Euclidis mente, rationum similitudinem ceu notam & primam analogiæ proprietatem assignari. Nil tale cogitásse videtur is; at cùm subinde vox analogiæ, vel ἀνάλογον ἔστι, rationis æqualitatem concinniùs exprimens & conciſiùs, interdum usurpanda videretur, eam nè quid ignorata discentibus facesseret negotii, vel caliginis effunderet, explicatam voluit dare. Quare nec Euclidem meritò taxat (taxat, inquam, ex hypothesi quòd Euclides istam definitionem tradiderit) quasi superfluè, pravéque binas ejusdem rei definitiones exhibentem. Nam eandem vel æqualem rationem habentium unicam exhibuit revera definitionem generalem, per essentialem quandam ipsorum passionem; quin autem præterea rationem habentia æqualem appellari ἀνάλογον & rationum identitatem vel similitudinem istam analogiæ quoque nomine designari submoneret, quid obsecro justæ causæ debuit impedire? Imò satis habuit causæ vim declarare vocabuli, plerisque for-

forsan ignoti. Fraudi verò fuisse videtur eruditissimo viro, quòd in Claviana, aliísque Latinis plerisque elementorum editionibus analogiæ descriptio loco suo legitur emota; & anteriùs protrusa quartum isthic locum occupat, quæ jure meritóque Græcis in codicibus octava numeratur. Itaque rectissimè suboluit, nasutissimo viro, descriptionem istam loco quem obsidet infertam temerè; neque forsan in suum ordinem repositam ità fugillàsset. Quanquam præterea non diffiteor elementi quinti definitiones attentiùs inspectanti, nonnihil in iis exscriptorum culpâ videri transpositum ac immutatum; qua de re non est opportunum conjecturas proferre. Quia eò potiùs accingimur, ut quod in hac materia præcipuum est æqualis rationis vel analogiæ definitionem exploremus appositam & accuratam. Id quod exequemur hâc methodo: Primò, definitionem Euclideam explicatam dabimus; neque non ei legitimæ definitionis conditiones ad amussim quadrare monstrabimus. Secundò, quæ contra definitionem istam adferuntur objectiones adnotabimus & diluemus. Tertiò, novas huic definitioni subrogantium doctrinas & methodos excutiemus; & quid in iis desideretur ac deficiat, quousque cedant Euclideæ definitioni, vel quatenus eâ deteriores sunt, adnitemur ostendere. Quod primum caput attinet, elementaris definitio sic Græcè sonat; Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν

σμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα καταλλήλως. Hoc est, reddente Clavio; in eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam & tertia ad quartam, cùm primæ & tertiæ æquemultiplicia à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si ea sumantur quæ inter se respondent (vel si ordine sumantur, hoc est, ut multiplex antecedentis primi cum sui consequentis multiplice, & multiplex secundi antecedentis cum sui consequentis multiplice conferantur). Talis est proportionum definitio Euclidea; μορμολυκεῖον illud, quo plerunque deterrentur ingenia virorum modesta vel ignava: modesta, quæ simul ac difficultatis aliqua species objectatur, suis diffidunt ipsorum viribus; ignava verò, quæ fermè nolunt attentionis aliquid ediscendis scientiis impendere; quasi nobis in hac rerum obscuritate constitutis sapere liceret ἀπροσδεῶς. Quorum utrique monendi sunt, illi nè planè despondeant animo, hi nè tantillum curæ refugiant, quando studium res aliquod, at non improbum, desideret. Cæterum verbis aliis concipi poterit hæc definitio, breviùs aliquantum, & forsan ad quorundam captum accommodatiùs. Proportionalia quanta sunt, bina binis, quum antecedentium æquè multipla quælibet consequentium æquè multiplis quibuscunque sunt, unà semper vel æqualia, vel majora, vel minora, ordinatè. Vel sic; analoga quanta (vel analogica, nos brevitatis causâ subinde dicemus ana-

analoga) cùm antecedentia quomodocunque pariter multiplicata, versùs consequentia pariter itidem utcunque multiplicata perpetuò conservant iidem genus rationis (hoc est, simul excessum, defectum, aut æqualitatem). Pariter multiplicata dixi versùs pariter multiplicata, sed obiter adnoto dici potuisse, pariter divisa versùs pariter divisa; hoc est, pro æquè multiplis accipi potuisse partes similes aliquotas; scilicet ut talis emergeret definitio, consonans Euclideæ. Analoga quanta sunt, cùm antecedentium similes quælibet aliquotæ partes consequentium quibusvis aliquotis partibus semper unà majores, vel æquales, vel minores sunt. Vel, cùm antecedentia pariter utcunque divisa cum consequentibus, utcunque pariter divisis, idem rationis genus unà retinent. Potuissent & hæc in eadem definitione copulari, sic ut ea tam æquè multipla, quàm similes partes sub disjunctione contineret, hoc modo; proportionalia quanta sunt, cùm antecedentia pariter utcunque multiplicata vel divisa, consequentibus utcunque pariter multiplicatis aut divisis, &c. Horum utrovis modo potuisset, inquam, ὁ στοιχειωτὴς æquâ ratione quod rem ipsam spectat, proportionalium definitionem effinxisse. Sed quia divisio multiplicatione nonnihil impeditior videtur, & simplicior, conceptúque facilior est integrorum quàm fractorum calculus, & paucioribus expeditur, æquimultiplicia potiùs quàm similes partes, consultò selegisse videtur & adhibuisse. Cæterùm ut hoc modo proportionalitatem declararet, in causa fuit, quòd cùm generalem investigaret de-

definitionem, tam earum æqualium rationum quæ ſymmetris terminis conſtant, quàm illarum quarum termini forent aſymmetri, ipſæque proinde non effabiles; cúmque rationum ineffabilium antecedentes explicabili modo conſequentes ſuos reſpicerent, ſic ut immediatè quomodo continerent ipſos, vel in ipſis continerentur, vix concipi poſſet; non ea propter à continendi modo (per quem effabilium rationum æqualitatem facilè definiviſſet, & actu quidem in elemento ſeptimo definivit) ſed aliunde peti debuit univerſale quoddam ſymptoma rationum pariter omnium, effabilium & ineffabilium, æqualitati connexum, eſque determinandæ ſufficiens; quale dum expiſcaretur, omnia perluſtrans animo tandem advertit, opinor, aliqua quanta cum aliis vel ex naturæ ſuæ ſpeciali quadam proprietate, vel ob adſumptam quandam conditionem ita combinari, connectíque inter ſe (vel ab alteris altera, quoad ſuæ quantitatis modum ita dependere) ut cùm univerſaliter ab illorum æqualitate vel inæqualitate, conſequenter horum æqualitas vel inæqualitas ejuſdem generis ſimultanea, tum etiam illorum ſimilia quævis augmenta vel decrementa, prorſus arguerent & ſecum traherent neceſſariò ſimilia horum incrementa vel decrementa. E.g. duo quævis æque alta triangula naturæ ſuæ ſpeciali proprietate quadam in elemento primo demonſtratâ, cum baſibus ſuis ita connectuntur, ut ipſorum priori modo quolibet aucto vel multiplicato, baſis etiam ſua ſimiliter augeatur aut multiplicetur: neque non prout adaugetur aut multiplicatur poſterius, ita ſimiliter

ter accreſcit & multiplex evadit ejus baſis: itémque ſi prius augmentum vel multiplex poſteriore majus ſit, una baſis ei reſpondens alterius augmenti vel multipli baſe major erit; ſi minus illud, hæc minor; ſi illud æquale, hæc etiam æqualis. Rurſus, duo quævis tota, cum ſimilibus ſuis partibus aliquotis, propter adſumptam iſtam ſimilitudinis conditionem, ita connectuntur, ut illorum quælibet multiplicationes includant & ſecum deferant harum conſimiles multiplicationes reſpectivè, neque non ſi prioris totius multiplex excedat poſterioris multiplum, etiam partium prioris multiplex unà ſuperabit partium poſterioris multiplum; ſi deficiat illud, hoc deficiet; ſi adæquetur illud, hoc etiam neceſſariò adæquabitur. Hæc cùm adverteret auctor, etiámque porrò deprehenderet, in aliis aliter affectis quantis ſecus evenire, verbi gratiâ, ſicut poſthac oſtendemus, in triangulis differenter altis, neutiquam ex unius cum baſe ſua pariter multiplicati exceſſu, ſuper alterius multiplum infertur baſis ſuæ exceſſus ſupra baſim alterius, cum altero pariter multiplicatam: neque ſi tota cum diſſimilibus ipſorum partibus comparentur, indè quòd prius æquè cum ſuis partibus multiplicatum excedat poſterioris multiplex aliquod, ullatenus conſequetur ideo partium prioris multiplum excedere partes poſterioris æquè cum ſuo toto multiplicatas. Hæc, inquam denuò, cùm obſervaret Euclides (ſeu quis alter harum definitionum conditor) & proprietatem iſtam antedictam omnigenis promiſcuè quantis, ſymmetris & aſymmetris, convenire (nulla ſiquidem

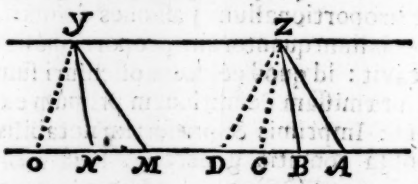
dem illic ſymmetriæ vel aſymmetriæ cujuſvis intervenit conſideratio) hinc ex illa rationum taliter affectis quantis accidentium mutuos ad ſe reſpectus generatim æſtimandos cenſuit ac definiendos. Arbitratur Clavius auctorem cùm primò perſpexiſſet hoc ſymptoma ſymmetris quibuſcunque proportionalibus accidere, tum nonnullis etiam aſymmetris quatuor quantis aliquando convenire, inde jure ſuo uſum proportionalitatem ex illo generaliter determinandam cenſuiſſe. Mihi potiùs videtur, quando nedum id effabili ratione præditis analogis (juxta definitionem aliquam priorem ità denominatis) ſed univerſim omnibus ità, ſicut innui, per naturæ ſuæ proprietatem ſpecialem, aut per adſumptam conditionem in ſe connexis bis duobus quantis id comperiſſet accidere, per ipſum habitudines rationum ejus modi quantis competentium ab aliis exiſtimâſſe diſtinguendas; quas meritò quidem eaſdem vel æquales dixit, quoniam ſi quando contingeret ejuſmodi rationes idem conſequens habere, vel ad idem utcunque conſequens revocari poſſe, ſemper ipſarum antecedentes adæquarentur. Sed ita forſan auctor hujuſce definitionis ratiocinari potuit, & ſecum animo verſare: è confuſa proportionalitatis idæa, quatenus illa rationum ſummam præ ſe fert ſimilitudinem, perſpicitur antecedentes eodem genere rationis ſimul ad conſequentes referri. Quod ſi multiplicentur antecedentes per eundem quemlibet numerum, ſatis adparet hanc ſimilitudinem, quoad rationis genus neutiquam immutari, quum hi termini ſimiliter adcreſcant. Sin

&

& præterea per eundem quemvis numerum conſequentes etiam multiplicentur, adhuc perdurabit eadem ſimilitudo, retinebitur idem utrinque rationis genus; quamvis prout numeri multiplicantes aſſumuntur majores aut minores, ipſæ ſingulares rationum ſic immutatarum quantitates innumeris modis variantur, augentur, & minuuntur, ſic ut ſubinde termini antecedentes conſequentibus æquentur, ſubinde deficiant ab illis, vel illos exſuperent magis minúſve. Hujuſmodi fortaſſe diſcurſu nonnihil Metaphyſico, neque tamen admodum obſcuro, vir ſagaciſſimus ad hujuſce rei fundum penetravit, & inde definitionem nobis hanc extraxit. Verùm quocunque modo, quacunque anſâ arreptâ, devenerit auctor ad hujus ſymptomatis notitiam, ejus ſaltem ut ſubtiliſſima fuit inventio, ſic uſus eſt præclarus, & perquam opportunus propoſitæ materiæ; ſiquidem ex eo immediatiſſimè, directiſſimè, breviſſimè, clariſſiméque præcipuas pleraſque generales proportionalium paſſiones deduxit, ut & ſpecialium quantorum proportionalitates indicavit: id quod deinceps oſtenſuri ſumus. Sed præmiſſam definitionem primùm explicemus: Imprimis & præſertim notabilis eſt appoſita conditio generalis, Καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν· ſecundùm quamcunque multiplicationem, nec enim ſufficit ut aliquando contingat homologorum terminorum æquè multiplicia ſic affici (minimùm ut unà excedant, deficiant, aut æquentur) ſed argumentis manifeſtis evinci debet hoc ſemper eventurum. Debet, inquam, evinci non ex inductione quapiam perpetua (inductio

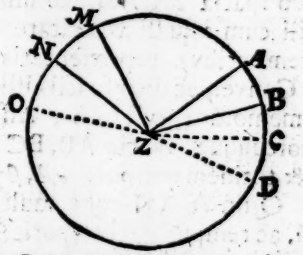
res

res est infiniti negotii, quámque Matheſis omnino reſpuit) aſt univerſali demonſtratione derivatâ, ex ſpecialium quantorum proprietate aliqua eſſentiali, vel fundatâ in magis univerſalium quantorum peculiari quadam conditione ſuppoſitâ vel compertâ. Accidere poteſt in aliquo caſu ſimultaneus ille defectus, exceſſus, aut æqualitas, etiam quantis minimè proportionalibus, aſt ſolis proportionalibus univerſaliter convenit, & ex ipſorum conſtitutione neceſſariò fluit; adeóque poteſt & debet de iis univerſaliter demonſtrari, quo conſtet proportionalitas ipſorum, & hanc eis definitionem congruere. Verùm non aliter meliùs illuſtretur hæc definitio, quàm exempla præponendo, quibus evidentiſſimè diluceſcat hanc conditionem multis revera quantis competere, quódque poterit hæc definitio facili negotio rebus applicari; quòd ad intellectum minimè difficilis, ad uſum ſatis prompta ſit. Ordiemur ab exemplis ſpecialioribus.



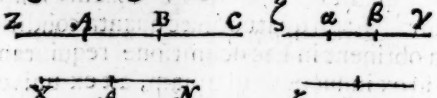
Sint duo triangula ZAB, YMN æquè alta (vel inter eaſdem parallelas conſtituta) ſuper baſes AB, MN. Habentur itaque bis duo quanta; duo nempe trigona ZAB, YMN & duæ baſes AB, MN; quibus aſſero definitionis noſtræ conditionem accidere. Nam utcunque pro lubitu æquè multiplicentur antecedentes

cedentes termini, triangulum ZAB ejúſque baſis AB, juxta numerum pũta ternarium, adſumendo rectas BC, CD æquales ipſi AB, ducendóque rectas ZC, ZD (liquet enim ob æqualitatem baſium AB, BC, CD etiam triangula ZAB, ZBC, ZCD æquari). Item ad arbitrium æquemultiplicentur conſequentes, triangulum YMN, ejúſque baſis MN, puta per binarium accipiendo rectam NO = MN, & connectendo rectam YO. Jam ex demonſtratis in elemento primo planiſſimè liquet, quòd ſi antecedentis trianguli triplex ZAD ſuperet conſequentis trianguli duplex YMO, etiam antecedentis baſis tripla AD ſuperabit conſequentis baſis duplam MO; ſi defectus ſit iſthic, etiam hîc defectus erit; ſi iſthic æqualitas, etiam & hîc æqualitas reperietur. Ergo quatuor hæc quanta conditionem obtinent in hac definitione requiſitam; nec id ex inductione quapiam, aſt ex univerſali diſcurſu adſtruitur.



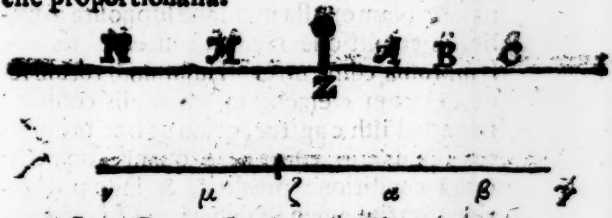
Rurſus, ſit circulus cujus centrum Z, & ad centrum anguli duo AZB, MZN, inſiſtentes arcubus AB, MN: oſtendendum eſt definitionis hujuſce conditionem etiam iſtis convenire angulis & arcubus. Sumatur arcûs AB quomodocunque multiplus, puta triplus, AD;

AD; & connectatur ZD. Liquet ex elemento tertio, angulum AZD etiam triplum esse anguli AZB. Tum arcûs MN quilibet accipiatur multiplus, pone duplus MO, & connectatur ZO. Itidem liquet angulum MZO anguli MZN duplum esse. Quod si angulus AZD superet angulum MZO, etiam (è demonstratis in elemento tertio) arcus AD arcum MO excedet; si is illum adæquet, etiam hic adæquabit hunc; sin defectus isthic fuerit, etiam unà defectus hîc erit. Ergò quatuor hisce quantis dicta conditio per demonstrationem quandam universalem ostenditur convenire. Porrò, (nam exempla libenter huic penitius enucleandæ rei multigena congeram)



Sint duo spatia ZA, XM, ab uniformiter lato mobili cum æquali velocitate percursa diversis temporibus, repræsentatis à lineis $\zeta\alpha$, $\xi\mu$. Conveniet dico spatiis istis ac temporibus memorata conditio; Assumantur enim quotcunque spatia AB, BC ipsi ZA æqualia, & totidem tempora $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ipsi $\zeta\alpha$ æqualia. Quin & XN æquè multiplex sit spatii XM, ac tempus $\xi\nu$ temporis $\xi\mu$. Liquet $\zeta\gamma$ esse tempus lationis per ZC, & $\xi\nu$ esse tempus lationis per XN (ex definitione scilicet motûs uniformis, juxta quem temporibus quibuscunque æqualibus peracta spatia æquantur, & vicissim æquantur tempora, quibus æqualia conficiuntur spatia). Item, ob æqualem ex hypothesi velocitatem, si spa-

ſpatium ZC majus ſit, minus, vel æquale ſpatio XN, erit eodem ordine reſpectivè tempus ζγ majus, minus, vel æquale erit reſpectu temporis ξν. Unde liquet hæc quatuor quanta habere ſe juxta conditionem in definitione noſtra præſtitutam. Iterum; ſi adſumatur, id quod rationi ſimul ac experientiæ conſentaneum eſt, momenta ſeu vires motivas ponderum, pro diſtantiarum à centro libræ modò ſic adaugeri vel imminui, ut æqualia diſtantiarum incrementa vel decrementa ponderibus iiſdem, æqualia momenta ſuperaddant aut detrahant, hinc oſtendetur juxta definitionis hujuſce ſententiam momenta ponderum æqualium diſtantiis ſuis eſſe proportionalia.



Ut ſi punctum Z ſit centrum libræ, cui ad intervalla ZA, ZM appendantur æqualia pondera, rectæque ζα, ζμ repræſentent ipſorum momenta, juxta dictas diſtantias; acceptis ipſorum ZA, ζα quibuſvis æquemultiplis ZC, ζγ; liquet è ſuppoſitione modò præſtratâ ζγ eſſe momentum ponderis appenſi ad diſtantiam C. Et ſimiliter acceptis ZN, ζν æquemultiplicibus ≒ ZM, ζμ; liquet ζν æquari momento ponderis ejuſdem ad N ſuſpenſi. Quòd ſi ZC excedat, vel adæquet, vel deficiat reſpectu ≒ ZN; etiam una correſpondenter momentum ζγ excedet; vel

æquabit, vel deficiat reſpectu τῶ ζγ. Ergò quanta ZA, ZM proportionalia ſunt ipſis ζα, ζμ, juxta definitionem Euclideam. Conſimili pacto ſpecialibus quibuſcunque materiis adaptari poterit hæc definitio, ſic ut poſtquam è propoſitorum quantorum proprietate quapiam elicita fuerit hæc conditio, per eam ipſorum proportionalitas demonſtretur. Sed & exempla plura ſuggeri poſſent univerſalium, hoc eſt, ad nullam quantitatis ſpeciem reſtrictorum quantorum, quibus ob adnexam conditionem aliquam accommodetur hæc definitio. Veluti ſi bina quævis æqualia quanta ſumantur A, B, aliáque quævis ſibimet æqualia C, D: demonſtrabitur A, B ipſis C, D eſſe proportionalia. Nam ex iſta utrinque ſuppoſita æqualitatis conditione facilè deducetur iis hoc ſymptoma convenire. Hujuſmodi totum ferè quintum elementum exemplis conſtat; nec aliud iſthic agitur, quàm ut hæc proprietas oſtendatur congruere quantis omnibus certâ conditione præditis, & inde proportionalitatis nomen iis deberi. Quapropter ejuſmodi pluribus adducendis exemplis non immorabor. Unicum duntaxat adjiciam, à quo fermè conſtet univerſaliter ex hac definitione pleraſque ab aliis ſubrogatas definitiones (hoc eſt, proprietates, à quibus alii quantorum definiunt analogiam) deduci demonſtrariſque poſſe. Sint quæcunque bis duo quanta A, B & C, D juxta definitionem hanc noſtram proportionalia, ſcilicet ut ſit ratio A ad B, æqualis rationi C ad D. Dico, conſequi quantum A diviſum per B adæquari quanto C diviſo per D (hoc eſt, iis com-

competere paſſionem iſtam ex qua Euclides in Elem. VII. commenſurabilium quantorum analogias definivit, perque quam non nemo cenſet etiam aſymmetrorum proportionalitatem utcunque poſſe non incommodè definiri. Quandoquidem nimirum etſi v. g. poſitis A, B aſymmetris, non poſſit A per B ſic dividi, ut quotiens emergat rationalis vel effabilis, attamen aliquis revera talis quotiens confuſo modo poſſit intelligi ſubeſſe; qui differat ab aſſignabili rationali quotiente (tam quoad exceſſum quàm quoad defectum) minori quàm aſſignatâ quavis quantulacunque quantitate. Nec ideo repugnamus, quin ſupponatur etiam aſymmetrorum quantorum diviſio qualiſcunq; ; quotienſq; diſtinctè non effabilis concipiatur dari: quinimo libenter hoc ſuſcipimus, ut eò magis univerſalitas conſtet ſubſequentis ratiocinii. Hiſce ſubnotatis, præmiſſam hypotheſin repetens dico, ſi juxta definitionem noſtram ſit A. B :: C. D, erit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Si neges, eſto exceſſus penes alterutram partem, puta ſit $\frac{A+X}{B} = \frac{C}{D}$. Multiplicetur X per aliquem numerum M, donec MX excedat B (quod fieri poteſt ex axiomate clariſſimo, quod aſſumunt cum Archimede Geometræ: quodlibet quantum toties accipi poteſt, ut ejus multiplex aliquoties acceptum excedere poſſit quodvis aſſignatum ejuſdem generis quantum) igitur liquet B multiplicari poſſe per aliquem numerum N, ut NB non ſuperetur ab MA, ſed ſuperetur ab MA+MX (quoniam

am MX majus est uno B). Quoniam verò $\frac{A+X}{B} = \frac{C}{D}$ ex hypothesi tua) utramque partem æquationis multiplicando per eundem numerum M, erit $\frac{MA+MX}{B} = \frac{MC}{D}$; item rursus dividendo partes hujus æquationis per eundem numerum N, erit $\frac{MA+MX}{NB} = \frac{MC}{ND}$. Itaque quoniam ostensum est MA+MX▭NB, erit MC▭ND (quum enim duæ fractiones æquantur, si numerator unius excedat ipsius denominatorem, etiam alterius numerator suum denominatorem exsuperabit, aliàs inæquales forent contra hypothesin, una major, altera minor unitate) quum igitur ostensum sit esse MC▭ND, sed non esse MA▭NB, liquet non esse juxta nostram definitionem A.B :: C.D ; quod primæ repugnat hypothesi. Perperam igitur negavit adversarius quantum A divisum per B æquari quanto C diviso per D. Quod erat demonstrandum. Jam verò tandem è tot hisce prolatis exemplis

1. evidenter patet, Primò, quòd hæc definitio nititur hypothesi clarè possibili, quæ scilicet innumeris exemplis commonstretur, haud absque fundamento confingi, sed actu rebus esse ; seu quòd hujus definitionis conditio

2. multis quantis revera congruit. Secundò, quòd proprietas hæc ita generaliter extenditur, ut ei nihil obstent quantorum asymmetria nec ἑτερογένεια· cùm nec istæ, nec iis oppositæ symmetria & ὁμογένεια, omnino in

ejus

ejus applicatione considerentur. Tertiò, quòd hæc proprietas necessariò fluit ex natura, vel intimè conjungitur cum specifica conditione quantorum quibus attribuitur, adeóque minimè removetur ab ipsorum quæ proportionalium essentia. Semper enim ostenditur competere quantis propositis per ipsorum, ut taliter conditionatorū, definitiones, aut per proprietates aliquas præcipuas & essentiales. 3. Quarto, quòd hæc definitio sterilis non est, nec inutilis, at conclusionum circa materias tam generales quàm speciales fœcunda mater. Ex ea siquidem totum Elem. V. & quicquid uspiam in elementis Geometricis circa proportionalitates ostensum est, derivatur ac dependet. 4. Addo quintò, quòd neque μοχθηρὸν est, cum molestia vel tædio pariens, at conclusiones quamplurimas admodum facili nixu prodit in lucem, Nam immediatè, directóque discursu, nullis ambagibus, quantorum ab illa proportionalitates primæ ac præcipuæ, eliciuntur & demonstrantur. 5. Sextò, quòd ex hac definitione satis facilè deducantur cùm affectiones istæ, à quibus alii definitiones suas extruunt, tum reliquæ proportionalium passiones, quas è suis ii definitionibus eliciunt; adeóque rursus quòd hæc proprietas cum proportionalitatis natura perquam intimè copulatur. 6. Adjicio, propter inductionis calumniam, nusquam hîc ullam inductionem comparere, sed universalibus omnino proportionibus constare, qui adhibetur, discursum, & ex universalibus principiis dimanare. 7. Neque video qui tot ad exempla tam luculenta mediocriter attenderit, cur Euclideæ definitionis

hypotheſi nè dum incomprehenſibilitatem quandam, at vel obſcuritatem ullam aut difficultatem exprobret meritò. Niſi quòd omnes omnium rerum notitiæ quatenus attentionem expoſcunt, eatenus difficiles videantur humanæ mentis faſtidioſæ ſocordiæ. Commune nobis hoc vitiúmne dicam, an ſymptoma quòd immunes omnis curæ degere, nulloque præſertim cum negotio ſapere cupiamus. Quid verò tandem hiſce perſpectis & ritè perpenſis impedit, quin utcunque reclamantibus Neotericis Doctoribus audacter pronunciemus Euclideæ huic definitioni definitionis cum primis optimæ notam ac titulum convenire? Quando nempe definitionis optimæ potiſſimis, quas ego quidem experientiâ duce comperio, vel aſtipulante poſſum agnoſcere ratione, legibus apprimè conſonet. Cùm ſcilicet hypotheſi nitatur clariſſimè poſſibili; cùm ſubjectum ſuum diſtinguat ab aliis omnibus; cùm ejus ut talis paſſionem exhibeat neceſſariam, eſſentialem, reciprocam; cùm ex ea aliæ paſſiones elici poſſint: adeóque ſit utilis concluſionibus aſtruendis, & procreandæ ſcientiæ; cùm denique facilè, clarè, directè rebus applicari poſſit, & ad unum transferri; præter quas vix alias mihi bonæ definitionis leges, conditiones, virtutes hactenus licuit obſervare; quæ cùm noſtræ conveniant, optimam aſſerere non dubito. Quod luculentiùs apparebit ex telorum depulſione, quibuſcum inſensè petunt adverſarii, quæ certè tam denſo nimbo volitant, adeò validâ vi contorquentur, iis ut excipiendis haud ſufficiat præſens Lectio, proximâ tentabimus.

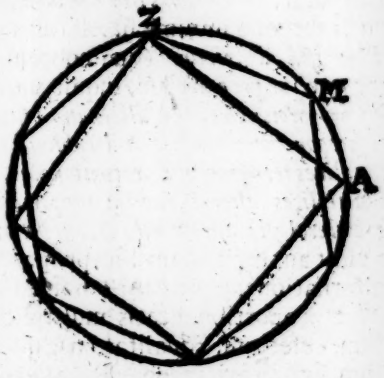
LECT.

LECT. VII.

IN proximè dissertatis Euclideam proportionalium definitionem utcunque conati sumus exponere, neque non argumentis quibusdam κατασκευαστικοῖς asserere. Quia verò plerique recentiores eam vehementer impugnant, aut planè rejiciunt (perpauci quidem simpliciter ut falsam propositionem, plures ut pravam definitionem) supereſt ut quas ei dicas impegerint excutiam. Imprimis omnium pessimè Ramus eam accepit, acerbissimáque perstrinxit sententiâ; sic tamen ut planissimè monstret se temerè, nec intellectâ penitùs causâ pronunciâsse. Primò, valde lubricam dicit & falsam: quæ profectò mera calumnia est, nec aliunde quàm ab errore spississimo nata; quia nempe quid sit per quamcunque multiplicationem simul excedere, deficere, æquari minùs rectè percepit. Disertissimè requirit Euclides ad proportionalitatis indicium, ut excessûs, defectûs, æqualitatis de homologorum terminorum æquè multiplis omnimoda simultaneitas & perpetua comprobetur: hic quia quanta non-proportionalia, subinde quasdam ejusmodi simultaneitates obtinere contingit, Euclideam enunciationem lubrici falsíque postulat: quid iniquius aut infirmius? Si quis, ut è vulgari materia simile quid depromam, virum probum definiret aut describeret, istiusmodi virum, qui ad rectæ ra- *Schol.* 13.

tionis normam suos omnes actus componit & conformat, an descriptionem hanc labefactat, quod subinde vir improbus aliquas actiones edit rationi consentaneas, justè nonnunquam operatur aut sobriè? Imò verò quòd ille, juxta sensum loquendo moralem, constanter ac perpetuò, sed incertò hic & contingenter ex virtutis agit præscripto, probum ab improbo satis dirimit ac secernit. Pariter & hic; perpetua simultaneitas proportionalia distinguit ab improportionalibus, quæ non eam necessariò vel perpetuò sortiuntur; neque quòd hisce nonnunquam obtingit, quicquam officit definitioni nostræ. Quid quòd, præterquam quòd Archimedes & alii sagacissimi veteres Geometræ, demonstrationes haud quaquam suas falso fundamento superextruxissent, plerique definitionis hujus, ut talis, impugnatores moderni, hoc eam præsertim nomine reprobant, quòd demonstrabilis, hoc est, necessariò vera, sit; adeóque suis è principiis Jacquetus, Borellus, Hobbius (& quoad numeros è principiis Euclideis ipse Clavius) illam demonstrârunt, tam longè abest ut hæc enunciatio falsa sit, aut justa Rami accusatio. Sed instat Ramus hisce verbis ipsissimis; *Neque enim proportio ex illa triplici differentia satis accuratè concluditur, cum fallacissima in isto argumento sit elenchus* (ubinam verò Rame? me beabis si ostenderis!) *subtensa*, inquis, *æqualis subtendit peripheriam æqualem, majorem majorem, minor minorem. Ergò* (secundùm nempe definitionem Euclideam) *subtensæ sunt proportionales. Id quod* (rectè ais) *falsum conficit Proclus.* At verò, præclare censor, hæc argu-

gumentatio, juxta diverbium, Οὔτε γῆς, οὔτ' οὐρανοῦ ἅπτεται, nullatenus attingit aut spectat quod præ manibus est negotium, ast ab eo longiùs quàm à tellure cœlum removetur. Ubi definitionis Euclideæ ulla hic applicatio? ubi æquemultiplicium aliqua mentio? ubi quid his affine vel simile, quo deducatur peripheriarum cum suis subtensis proportionalitas? Enimvero neque colligitur, neque colligi poterit, tale quicquam è definitione nostra, non perperam intellecta. Contrarium certè consequitur, & rectè colligitur ab ipso Ptolemæo, è propositionibus elementaribus derivatis ex hac, eíque cognatis subsequentibus definitionibus Euclidæis. Ne gratis hoc dicere videamur, unam adscribemus facillimam instantiam.



Sint arcus duo ZA, ZM, ille quadrans, hic sextans totius circumferentiæ. Dico arcus ZA, ZM non esse proportionales suis subtensis ZA, ZM, juxta nostram definitionem. Multiplicentur enim antecedentes ZA per numerum

merum quaternarium, & conſequentes ZM per numerum ſenarium; liquet quadruplam arcûs quadrantis ZA æquari ſextuplo arcûs ſextantalis ZM (cùm utrumque multiplex integram adæquet circuli peripheriam). Verùm quadruplex chordæ ZA minus eſt ſextuplo chordæ ZM, perimeter ſcilicet inſcripti circulo quadrati perimetro hexagoni eidem inſcripti: Ergò liquet peripherias ZA, ZM non eſſe juxta definitionem Euclideam proportionales chordis ſuis. Quod erat oſtendendum; unáque inſtantiæ Ramæanæ demonſtratur infirmitas ac (verbo veniam) impertinentia. Interim demirari ſubit hujuſmodi licentioſam criſin, quàm in veteres exercere ſolet Geometras homo, nè quid graviùs dicam, argutulus & dicaculus. Sed porrò diſputat, *Ut elenchus iſte non ſubeſſet* (ut quidem interpono minimè ſubeſt) *nihil tamen definitione iſtâ definietur* (quamobrem ita? ſciſcitor ego) *neque enim hîc*, inquit, *docebitur quid ſint proportionales, ſed alternatio proportionalium proponetur. Denique docebit iſta definitio ſimplices terminos eſſe proportionales, quorum multiplices alterni fuerint proportionales. Itaque hyſterologia duplex eſt, &c.* At quibus oculis vidit aut legit ullam hîc proportionalium alternationem proponi? ubi vel hilum comparet proportionalitatis multiplicium? exceſſum, defectum, æqualitatem æque multiplicium ſignificari video; ſed alternationis, aut proportionalitatis nullam volam, nullum cerno veſtigium. Num hoc eſt diſſerere, vel Sabinorum more quidlibet ſomniare? Quid, talibus adductum cauſis, talibus inſtructum argumentis falſitatis, fallaciæ,

ciæ, ſophiſtices, abſurditatis notas inurere venerandis iſtis capitibus; improperiis proſcindere tam inurbanis iſtos ſcientiarum conditores & coryphæos, abſque quibus fuiſſet, nil forſan haberet magnus hic tricarum artifex, præter Æſopicas fabulas, quarum analyſi mirificam illam ſuam addiceret dialecticam? Id quod innocentiùs plerumque feciſſet & tutiùs, quàm in tales viros atrociter invocâſſet. Sanè vix indignationi meæ tempero, quin illum accipiam pro ſuo merito, regerámque validiùs in ejus caput, quæ contra veteres jactat convicia. Reliqua proferre tædet quæ objicit, paris acuminis & peritiæ, quæque nil aliud præter hoc probant liquidiſſimè, quod omnino diſparis ſit negotii Logicas methodos texere, déque ſcientiarum arcanis judicare. Quod autem peremptoriè, triſtiſſimáque cum ſeveritate concludit, *Quare talis definitio tollatur è Mathematis.* Replico, niſi machinis impulſa validioribus æternùm perſiſtet inconcuſſa, nec unquam è Mathematis dimovebitur. Illo dimiſſo, Tacquetum aggrediamur, naſi ſagacioris hominem; qui ſicut modeſtiùs, ita prout uſu venit fortiùs, & majori cum veriſimilitudinis ſpecie, nos laceſſit. Diſſerentem audiamus; *Imprimis, certum eſt eâ definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquam explicari.* Repono primò, quòd nulla definitio rei cujuſvis naturam aliter explicat, quàm aliquam ejus affectionem neceſſariam & reciprocam, id eſt, huic noſtræ parem, aſſignando. Siquam exhibere poterit, haud illibenter causâ cedam; at ſi nullam, ut ego confido nullam darì,

dari, definitiones ergò cunctas uno involvit crimine, uno telo configit. Qui circulum è radiorum paritate, triangulum è trium rectarum concursu spatium includente, quadratum è laterum æqualitate, & angulorum rectitudine definit, quid aliud quàm figurarum istarum naturam ex affectionibus quibusdam suis explicet? Dico secundò, nullam dari vel concipi posse naturam, qualem ille confingit ac supponit ab affectionibus ejusmodi necessariis distinctam, iisve priorem. Habere talem aliquam affectionem ipsa rei natura est, ei essentiale est, eam constituit. Saltem, quod perinde est, habere quandam affectionum congeriem ita connexarum, ut una quævis alias implicet, & secum necessariò trahat, ipsissimam rei cujusque naturam constituit. Unde qui dicit, res habens talem affectionem, ejus naturam explicat: ut e.g. circulus est figura pares habens radios, vel figura naturæ talis, ut pares habeat radios: ubi habere pares radios est ipsa circuli natura; vel saltem pares habere radios, & alias hanc concomitantes affectiones, ejus naturam integrè complectitur ac declarat. Sicut etiam habere rectos ad circumferentiam angulos diametro subtensos, vel aliam quamvis reciprocam affectionem æquè naturam exprimit circuli. Alias rerum naturas qui cogitant aut quærunt, nil aliud quàm chimæras insectando fugaces ac evanidas imponunt ac illudunt sibi; nullas sanè tales unquam deprehendent aut assequentur. Igitur Euclides cùm proportionalium affectionem necessariam exhibuerit, ejus naturam, quantùm fieri solet & potest,

test, abundè declaravit & explicuit. Adeóque factum satis videtur huic objectioni. Porrò, bisulco nos argumento persequitur Tacquetus; *Deinde* (inst) *illa multiplicium proprietas adducitur vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocunque ea demonstrata fuerit, de quibusvis rationibus inferre certò liceat æquales eas esse, vel is sensus illius est, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere vel excedi.* Respondeo, utrumque verum esse, ut signum infallibile producitur, & exhibetur ut character proportionalium essentialis ac distinctivus. Quæ certè duo reipsâ nihil differunt, omníque probæ definitioni conveniunt. Nullum enim infallibile rei cujusvis signum datur præter ejus essentialia attributa. Potest unaquæque res omnibus extra suam essentiam positis denudari, neque potest ideo quidvis non essentiale certam rei præsentiam indicare. Sed utrumque figillatim impugnat adversarius hisce verbis; *Si primùm demonstrare debuerat eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse, ut ex ea rationum æqualitas certò possit inferri. Id verò minimè vulgare est theorema, quod neque Euclides neque post Euclidem ullus demonstravit.* Respondeo, legem hîc Euclidi reliquísque definitionum auctoribus injustam & impossibilem figi, scilicet ut demonstrent definitionis prædicatum subjecto convenire: non tenentur, neque possunt id demonstrare, sed gratis assumunt, hoc est, attributo proprium subjecti nomen imponunt ex arbitratu suo. Num incumbit mihi demonstrare circuli nomen solis pares

ra-

radios habentibus figuris competere? Minimè verò, sed iis omnibus & solis jure meo circuli nomen adsigno. Eodem planè modo pro lubitu suo (quamvis non temerè nec imprudenter, at certis quas non semel insinuavi de causis justis illis & idoneis) æqualium rationum nomen attribuit ὁ στοιχειωτὴς omnibus & solis dictâ proprietate præditis rationibus; proportionalium appellamentum appropriat quantis conditionem istam obtinentibus: unde propter hoc ipsum rationum æqualium, & quantorum proportionalium nomen meritò censendum est, iis omnibus & solis congruere. Ut enim scientiarum magistris jus sit imponere nomina, discipuli teneantur ea recipere, justissimâ summéque necessariâ lege sancitum est. Unicum est, quod definitionis auctor ostendere tenetur (exemplis scilicet ad sensum claris, aut per evidentem discursum) attributum definitionis impossibile nihil, aut mere imaginarium complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione suppositâ præditas. Ut qui circulum definit e radiorum paritate (utor enim libenter & consultò facillimis & familiarissimis exemplis) nihil aliud demonstrare tenetur, quàm non repugnare tales figuras existere, quibus ista conveniat proprietas. Id quod ex ipsarum generatione, per rectæ lineæ circumductum aut alio pacto, potest ostendere clarissimè. Ita cùm perfacile perspicuéque probari possit, idque passim præstetur ab Euclide, ubicunque definitionem hanc applicet materiæ cuivis determinatæ, dari quanta, quibus conveniat hujusce definitionis hypothesis, nihil

am-

ampliùs est exigendum, eique licet optimo jure, quantis ijs omnibus & solis proportionalium nomen affigere. Quod subdit autem hanc proprietatem proportionalibus accidere, esse theorema minimè vulgare: respondeo, repetens è jam olim expositis, quòd secundùm rem ipsam omnis definitio est theorema; propositio scilicet demonstrabilis ex aliis subjecti definitionibus, aut ex aliis reciprocis affectionibus priùs attributis subjecto. Neque non viciſſim, quòd omne theorema possit in definitionem compingi, modò poterit exemplo perspicuo constare, quòd possibilem includit hypothesin. Quare quòd ex aliis proportionalium definitionibus inferri possit hæc proprietas, & ex ea theorema constitui, nihil ejus ad hoc capacitati derogat aut impedit, quò minùs legitimam ingrediatur definitionem: sicut neque permutatim, quia possit, ut supra ostensum, ex hac definitione deduci proprietas, è qua Tacquetus ipse malit proportionalitatem definire, adeóque quod ejus definitio theorematis indutura sit formam, ullatenus id officit, nè ejus definitio proba censeri debeat atque legitima, quamvis alia forsan officiant. Quòd verò non vulgare theorema dicit, innuens nimirum è definitionibus ac principiis à seipso præstratis difficulter elici proprietatem hanc, nihil ad rem facit. Nec enim ad definitionis perfectionem requiritur, ut quæ in ipsa adhibetur proprietas ex aliis utcunque positis principiis facilè consequatur. Et prorsus eodem pacto quam ipse prolaturus est definitio theorematis haud vulgaris titulum merebitur, quia non omnibus adeò pro-

clive

clive fuerit eam è definitionibus aliis, nominatim ex hac noſtra, derivare. Neque deinde mirum eſt, nec ab Euclide, nec ab alio quopiam demonſtratum fuiſſe hoc theorema, cùm in definitionem aſſumpſerint, & principium habuerint aliis demonſtrandis inſerviens; quis enim unquam principia ſua aggreditur demonſtrare? Quopropter & nihili pendo diſcurſum iſtum, quem alibi Tacquetus effert his verbis; *Cujus quidem negotii cùm ſatis ardua atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam ſuprà cognoſcemus, facilè apparebit præpoſterè egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum & fundamentale indicium ſumi voluit ex hac multiplicium indemonſtrata hactenus proprietate, cujus tam remota & obſcura eſt cum rationum æqualitate connexio.* Quæ ſic in accuſatorem retorqueo, ut minimè dubitem præpoſterum ei judicium objectare, qui vitio vertit Euclidi, quòd indemonſtratam proprietatem poſuerit in definitione ſua; quaſi verò ſubjecti proprietas in definitione poſita ſine manifeſta contradictione demonſtrari poſſit ab eo, qui per illam ſubjectum definiverit. Nam ex eo quòd in definitione ponitur, aſſumitur eſſe prima omnium proprietas, at quatenus demonſtrabilis aliquam ſupponit priorem, & idcirco nequit eſſe prima. Quare non præpoſtero, ſed rectiſſimo proceſſit ordine magiſter noſter. Cùm verò remotam & obſcuram eſſe clamat hujuſce proprietatis cum rationum æqualitate connexionem, notoriè petit principium; nam Euclides certè manifeſtiſſimam eſſe ponit, & ponendo facit connexionem ejus cum hac, cum ex ea hanc definierit. Sed peragit, ut opinatur

natur, nos premere; Si secundùm (hoc est, *Si voluit Euclides per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi, quam earum magnitudines dicto modo excedere vel excedi*) *securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absoluta rationum æqualitate.* Ad quæ nihil amplius habeo quod respondeam, quàm hîc ab eo nescio quam rationum absolutam æqualitatem somniari, præexistentem & distinctam à passionibus per quas rationum æqualitas definiatur; qualis profectò nulla datur, & ab illo fine fundamento dari supponitur. Rationum æqualitas (sicut aliæ quævis in scientiis consideratæ materiæ) non aliunde quàm ex convenientia cum definitione sua, seu Euclidea seu quævis alia, siqua reperiri potest, legitima censeri potest. Rationes sunt exinde absolutissimè formalissimèque æquales, hoc ipso quod proprietatem habent expressam in definitione sua: quare cùm in Euclideis theorematis demonstratur hæc proprietas quibuscunque quantis convenire, simul constat iis rationum æqualitas competere; sicut quando de figurâ qualibet ostenditur radiorum paritas, eo ipso demonstratur illam esse circulum. Infirmum igitur & irritum est epiphonema, quo suas hasce claudit argumentationes; *Quomodocunq; igitur illa definitio accipiatur librorum 5, ac 6 demonstrationes vacillant, quamdiu demonstratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate semper esse connexam.* Juxta quam certè sententiam vacillabunt omnes cujuscunque scientiæ demonstrationes. Nam si

perpetuò demonstrari debet in definitionibus attributas proprietates veris suis subjectis connecti, nullus omnino finis erit demonstrandi, vel nullum potius principium, ast ad infinitum retro procurrat oportet omne ratiocinium: præterquam quod quamcunque proportionalitatis definitionem ipse nobis assignaverit, idem ei verbis & sententiis iisdem objectari poterit; sua lege constrictus tenebitur ipse demonstrare proprietatem, quam assumit rationibus æqualibus congruere, e priore scilicet aliqua; & illam porrò ab alia, donec interminabilis molestiæ pertæsus errori suo renunciandum agnoverit. Demum ad hosce Tacqueti discursus
1. universim admoto; Primò, quod ubique principium petit, & vitiosos committit circulos: non est proxima (vel est remota) proprietas, quia demonstrari potest, hoc est, quia datur alia propior: datur alia propior, quia demonstrari potest, æqualitatem rationum non constituit hæc proprietas (hoc est, ejus definitionem ingredi nequit) quia differt ab ea, non clarè connectitur, valde remo-
2. vetur ab ejus natura. Et ita passim. Secundò, quòd nec ille nec alii plerique, quantum judico, definitionis naturam satis perspiciunt; in quibus revera nihil sit aliud quàm nomen imponitur rei, quatenus illa passioni subjacet, utcunque per sensum aut per ratiocinium evidenter exploratæ: verùm nescio quas illi naturas, essentias, formalitates abstrusiores cogitant, in apricum nunquam proferendas. Per quas naturas rem ad vivum resecando, dilucebit eos nihil aliud intelligere, quàm rei definitæ nomini, qua-

quatenus in usu communi versatur, respondentes conceptus aut significatus aliquos imperfectos & indistinctos, in scientiis minimè respiciendos, & ad condendas demonstrationes ineptos; ad quos proinde nullatenus exigendæ sunt definitiones: imò secludendis & eliminandis iis, ipsorúmque loco substituendis rerum certis, distinctis, atque claris idæis efformantur definitiones, rebus appropriantes nomina, quatenus illæ subjiciuntur affectionibus quibusdam ad sensum vel ad intellectum conspicuis. Noto tertiò, quòd 3.
hujusmodi ratiociniis adductus Tacquetus, æqualium rationum definitionem assignârit admodum vitiosam & inutilem. Ait enim æquari rationes, cùm unius antecedens eodem modo continet suum consequens, vel in eo continetur: quo alterius antecedens suum consequens continet, aut continetur in eo. Quæ definitio non nisi craſſam & confusam ingenerat proportionalitatis idæam; nulli procreandæ conclusioni parem aut idoneam. Anceps enim & obscura phrasis est, eodem modo continere, neque revera, nisi per aliam definitionem limitetur, aliquid distinctè significans. Multi modi sunt aliquatenus iidem ☞ continere; majora quælibet continent minora eodem excessûs modo; inæqualia duo quævis eodem inæqualitatis modo se respiciunt quo alia bina inæqualia. Ergò nisi per aliquod restrictius & certius indicium declaretur, quid sit eodem modo continere, quænam modi designetur hîc identitas, & proinde quid sit æqualitas rationū ignorabimus aut ambigemus. Ut alia jam præteream incommoda, quib⁹ ista subjicitur definitio-

unica ſupereſt exceptio, præ reliquis maximè plauſibilis, & cui vereor ne penitus expediendæ non ſim; non quia magnam vim habet in ſe, verùm quia multorum præjudiciis favet, & patrocinatur iguaviæ: his ab eo verbis proponitur; *Denique, ut ſibi conſtarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit, & tyronibus ſemper plurimum faceſſivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant.* Quod capitale crimen ut aliquatenus amoliar atque depeliam, reſpondeo primo, diſpiciendum eſſe quibus ex cauſis iſta multis adeò faſtidioſa quam obtendunt perplexitas oriatur; num ex reipſa, quæ commodiorem nullam aut clàriorem expoſitionem admittat; vel ex interpretum incuria, qui non ſatìs hanc definitionem perſpicuis exemplis elucidârint; an ex diſcentium culpa, qui priuſquam animum adverterint ſedulò, ſerióque perpenderint, faſtidio correpti difficultatem ſibi quandam inſuperabilem imaginantur & perſuadent. Si quid horum in cauſa ſit, ut certè mihi compertum eſt hæc omnia nonnihil conferre, quo perplexior videatur hæc definitio, abſolvendus eſt auctor, aliiſque cauſis hoc quicquid eſt culpæ imputandum. Res ipſa penitus excuſari nequit, quæ propter aſymmetriam quantorum aliquâ peculiari difficultate laborat; ſic ut nemo non arduum eſſe fateatur, affectionem aliquam proportionalibus æquè congruam deprehendere, definitionem aliquam cunctas rationum æqualitates complectentem exhibere. Quod & hinc patet, quia præclaris viris huic morbo remedium ad-

adhibere conniſis hactenus accidiſſe videtur, ut vel nihil præſtiterint omnino ſufficiens, aut ut viis inſtiterint prolixioribus, nec minùs impeditis & implicitis; aut methodos ſaltem tradiderint culpæ cuipiam graviori ſubditas: adeò res ipſa contumaciter repugnat, ut ratione pertractetur admodum facili & expeditâ. Nec interpretes omnino culpâ libero, nè quidem optimum Clavium, qui licet hanc definitionem cùm explicuerit probè, tum judicio meo validè propugnârit, tamen exemplis eam ſatis illuſtribus & appoſitis haud videtur declarâſſe: Nam exempla quæ profert verborum ſenſum potius explicant, quàm (id quod præcipuè definitionem quamvis commendat ſimul ac illuſtrat) conditionis in definitione poſitæ poſſibilitatem, & veram in rebus exiſtentiam repræſentant; ut & nimiâ generalitate quadam ſuî diſcentium phantaſias obturbant, tum fortè non ſatis expreſsè luculentéque cavet, nè diſcentes (imò potiùs occaſionem præbere videtur ut ipſi) inductionem quandam exigi, ſibíque putent infinita quædam multiplicationum tentamina mente percurrenda; quod certè mirum non eſt, ſi confuſos eos reddat & deſperabundos; cùm tamen nihil hîc tale deſideretur, utì toties monuimus. Quod ipſos diſcentes attinet, nimis quàm apparet, eos ſibi plerunque deeſſe. Cùm enim hujuſce definitionis verba clariſſima ſint & omnis homonymiæ expertia, quotuſquiſque tamen eſt qui vel iis penitus intelligendis operam navat, qui tantam à ſuo ſtomacho patientiam impetrat, ut trium lineolarum ſenſum accuratè perpendat? Equidem haud

modico pignore contendere, meámque penè fidem obſtringere non dubitem, qui definitionem hanc ſerio perlegerit, ac ad ejus tantùm in prima, vel in ultima ſexti elementi propoſitione applicationem haud ſegniter attenderit, illi deinceps hanc definitionem haud ita perplexam, intricatam, aut difficilem apparituram. Hiſce præmiſſis ad Tacqueti verba repono, negando planè quòd ullus hîc extet labyrinthus, rem quàm in ſe eſt intricatiorem reddens, quem non expoſitoris extricet mediocris ſolertia, à quo non attentionis modicæ filum tyrones expediat. Addo, ubi nulla verſatur in vocabulis amphibologia, ubi nullum à prolixitate tædium, ubi ſemper directiſſimus adhibetur diſcurſus (quæ ſedulò rimanti deprehendentur omnia in hoc caſu concurrere) non ibi tanta ſubeſſe poteſt obſcuritas aut difficultas. In paucis elementi quinti propoſitionibus, iſſque præcipuis, adhibetur hæc definitio; ſed ubique quantùm memini directè per eam, & immediatè demonſtratis. Aç ubi ſpecialibus accommodatur materiis in aliis elementis, vel in aliis libris Geometricis, concluſionem ſemper infert uno ſimpliciſſimo directiſſimóque modo, non ut alii ſuis in methodis faciunt indirectè, vel ad abſurdum reducendo; qui demonſtrandi modus (ut omnes agnoſcunt) obſcurior eſt & ignobilior. Porrò, ſi liceret cum Tacqueto quicquid velimus, ut ſuâ luce clarum adſumere, quódque maximopere veteres devitârunt Geometræ, axiomatum numerum in immenſum cumulare, magno quidem ſæpe compendio res agi poſſet, at quantum brevitatis accederet, & exurgentis inde

non

non nullius evidentiæ, tantum decederet firmitati, quæ multo potior eſt, & imprimis ſpectari debet in ſcientiis. Qua de re jam olim plura (ſi commemini) diſſertavimus. Quare non eſt quòd ſuæ methodi brevitatem aut evidentiam jactitet Tacquetus; præſertim cùm nullam (aut æquipollentem nulli) analogiæ definitionem ipſe ſubſtraverit, & propoſitiones ſuas, ſeu gratis aſſumptas, ſeu ut ipſe exiſtimet demonſtratas, incerto ſubjecto accommodaverit. Aſt videmur eximium hunc adverſarium jam ſatis repuliſſe. Succedit D. Hobbius, quo tamen breviſſime defungemur, quoniam ejus argumentis in præcedentibus adaptabiles ſuggeſſimus ſolutiones. Audiamus: *Sed invenire per hanc definitionem hujuſmodi quatuor quantitates impoſſibile eſt, quia multiplicatio per omnes numeros, cùm infiniti ſunt, eſt impoſſibilis; non eſt ergo definitio hæc, ſed hypotheſis.* Ad hunc diſcurſum prænoto, quòd male ſumit hic philoſophus Euclidem, id in hac ſibi definitione negotii dediſſe, ut proportionalitatis generationem traderet. Nihil ille tale meditatus aut molitus eſt, ſed ut proportionalitatis ſolummodo diſtinctivam proprietatem adſignaret, uti cùm circulum ex radiorum paritate definivit. Ubi forſan ἐν παρόδῳ ſit operæ pretium annotare, quòd etſi communiter optimæ ſint ejuſmodi definitiones, quæ rerum generationes exprimunt (imò revera ſolæ tales accuratè loquendo bonæ ſunt, cùm res definitæ ſunt immediatè generabiles, & per ſe quaſi primario ſubſiſtunt) attamen nonnullis rebus ejuſmodi definitiones non conveniunt; iis ſcilicet quæ non per ſe *Dial. 2.*

generantur, at ceu passiones secundariæ ex aliarum rerum jam progenitarum constitutione resultant, & promanant ex ipsarum primariis affectionibus. E.g. qui focum parabolæ vel ellipsis definiendum suscipit, postquam animadverterit inesse talem parabolæ jam constitutæ proprietatem, ut omnes ad axem paralleli radii à curva parabolæ linea, ad certum quoddam in axe punctum reflectantur; ut & ellipsi tale quoddam symptoma competere, quòd ab uno quodam in axe puncto prodeuntes radii, ab ellipsis ambitu versùs aliud in axe punctum retorquentur; hâc (inquam) proprietate (quæ è primariis aliis linearum istarum proprietatibus fluit) deprehensâ, focum optimè definiat, non è generatione suâ, quod impeditissimi foret negotii, sed è comperta dicta proprietate; punctum in axe scilicet, in quod radii ad axem paralleli, vel ex uno quodam designabili in axe puncto prodeuntes dicto modo reflexi congregantur aut tendunt. Ita proportionalitas, cùm non sit res primariò subsistens, nec immediatè generabilis, at passio quædam è quantorum aliqua prædeterminata conditione resultans, vix fieri potest, saltem non expedit, ut per generationem aliquam definiatur. Utcunque manifestum erit, hujusce definitionis verba perscrutanti, nullam hîc de facto generationem attingi, sed aliquod duntaxat symptoma quatuor subinde quantis conveniens innui, quibus ex hypothesi quod illo gaudent symptomate, nomen inditur eandem habentium rationem seu proportionalium. Jam ad exceptionem Hobbianam respondeo, quòd etsi prorsus im-

impossibile concedatur, per hanc definitionem quatuor proportionales quantitates expiscari (sicut impossibile est radiorum paritate circulum invenire, tentando scilicet & experiendo, num singuli in figura proposita qui insunt infiniti radii pares sunt) tamen id quod hîc solùm intenditur & sufficit, admodum facile est demonstrare, quòd quatuor nonnullis quantis (v.g. duobus æquè altis parallelogrammis & eorum basibus) hæc proprietas universaliter conveniat (sicut & facile fuerit è datis quibusdam conditionibus ostendere figuram aliquam habere radios omnes inter se pares). Ad illud nulla requiritur per omnes numeros multiplicatio, nullus labor infinitus, ut multoties ostensum. Igitur hæc objectio nihil efficit. Sed porrò; *Non est* (inquit) *definitio hæc, sed hypothesis, & quidem vera, sed non principium, quia demonstrabilis est, & ab Hobbio demonstratur.* Regero primùm, quòd eandem rationem habentia vel proportionalia quanta vocitari debuerint ab Euclide, quæ proprietatem obtinent hac in definitione signatam, nec ille nec alius quisquam demonstravit, aut potuerit demonstrare. Hoc enim solùm ab Euclidis libero pendebat arbitrio. Non igitur omnino verum est hanc definitionem ab ipso fuisse demonstratam. Secundò, ut priùs dico, nihil officere definitioni cuivis, quòd proprietas, à qua definitur, possit de subjecto per aliam quandam passionem definito demonstrari; aliàs nulla definitio bona foret. Sanè nonnullæ res πολυπαθεῖς (multis passionibus præditæ) possint compluribus modis commodè satis & rectè definiri: sint exem-

plo

plo conicæ ſectiones, quæ cùm admodum variis modis progigni poſſint (per motuum dependentias, & per motuum compoſitiones diverſimodas; per variorum corporum ſectiones, pérque multifarias methodos infinita puncta deſignandi) cúmque paſſiones innumeras obtineant intimè ſibi connexas, & ex parte rei æquè primas, æquéque claris hypotheſibus ſubnixas, eapropter pluribus modis definiri poſſunt & ſolent; adeò quidem ut ego nullam ex iis rejiciendam arbitror, quamvis unâ quâvis ſelectâ, ceu primâ, reliquarum ex ea proprietates conſectentur, & proinde demonſtrabiles ſint. Ex quo liquet obiter falſum eſſe, quo præſertim niti videntur adverſarii, pronunciatum illud ſeu placitum Ariſtotelis in Topicis traditum,

Topic. VI. 5 Πλείους ἂν ἐνδέχοιτο τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοὺς εἶναι *(Fieri nequit, ut ejuſdem rei plures ſint definitiones).* Imò fieri poteſt, ut reipsâ pluſculæ ſint, tot nempe rei cujuſvis definitiones, quot ipſa proprietates reciprocas habet, liquidò nobis expoſitas & apparentes. Igitur nequicquam D. Hobbius definitioni noſtræ repugnat. Recitabo tantùm quæ circa definitionem hanc in opere profert Arithmetico vir clariſſimus & eruditiſſimus partim ei faventia, partim adverſantia;

Cap. 35. *Nos* (ait) *hanc definitionem, quamvis veram quidem, & Euclidis ſatis accommodam, in noſtris demonſtrationibus omittendam duximus, neque ad hoc χρήσιμον proportionalia accommodamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeò forſan, tyronibus præſertim, perſpicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate reſpicit, quàm eorundem affectionem aliquam ſatis remotam.* Hæc ille,

ille, quibus haud abludentia cùm antehac satis expenderim, causæ nihil est cur iis immorer ampliùs discutiendis. Ad triarios jam deventum est, ad ipsum illum subtilissimum Borellum, adversarium acerrimum, quique præ reliquis hoc præstitit egregium, ut novam proportionalitatis doctrinam, equidem pulchram & solidam, attamen Euclideæ minimè sicut existimo cunctis expensis anteferendam, è sua penu protulerit. Verùm nec in ejus disputatione sedulò perscrutans, omnia quicquam reperio gravioris momenti, definitioni nostræ derogans. cui non in prædictis videatur abundè satisfactum. Clavium pleraque magis quàm Euclidem attingunt; Clavii verò dicta, ut ut possem, non è re nostra jam duco propugnare. Utcunque quia modulum suum etiamnum excessit præsens dissertatio, quæcunque nova pertendit Borellus consideratu digna, posthac examinanda relinquo; cùm & in ejus ac aliorum recentiorum methodos animadversionem instituam. Interim sufficiat hactenus prodiisse.

LECT.

LECT. VIII.

POstremâ Lectione connisi sumus à nonnullis præcipuis adversariis contra definitionem proportionalium Euclideam vibrata tela depellere. Supereſt Borellus, omnium graviſſimus, opinor, & acerrimus ejus impugnator, eóque pluris habendus, quòd ab aliis frustra tentatam novam proportionalitatis eruendæ methodum, admodum (ut quod verum est liberaliter agnoscamus) pulchram è proprio cerebro concinnârit; operam in eo præstans (fateor ultro) laudabilem & non inutilem, cùm variis modis eaſdem pertractari materias, è diverſis principiis eadem deduci theoremata voluptati simul ac usui sit; in sua tamen (ut arbitror) extruenda methodo felicior fuit, quam in communi diruenda. Id quod è vestigio jam aggredimur ostendere. Quid objiciat audiamus:

Pag. 125. *Revera* (inquit) *dici non potest, quòd assignata proprietas naturam rei declaret, & distinguat à qualibet alia, imò rem difficilem obscuriorem reddit.* Ita judicat: at nos hæc temerè dici satis (opinor) in præcedentibus ostendimus; scilicet proportionalitatis non aliam esse naturam, quàm hujusmodi proprietatem aliquam habere, quam aliæ proprietates sequantur; adeóque naturam ejus in hac definitione (quantùm in ulla fieri potest) abundè declarari: quódque distinguat hæc proprietas analoga à non analogis, cùm analogia

gia cum ea reciprocetur, & ex instituto vel arbitrio definientis (non quidem illo licentioso, sed legitimo ac rationabili) nil aliud significet analogum, quàm τὸ hanc habere proprietatem. Denique, rem ab ea obscuriorem reddi pernego: *Nam* & (id quod ipse verbis disertis fatetur) *verba definitionis exponunt absque ambiguitate quid sit talis proprietas*: Et (ego addo) clarissimè patet eam rebus quamplurimis inesse; nec non ejus applicatio quod experientia planè monstrat, haud difficilis est; & nihil obstat quin proportionalium nomen, aut aliud quodvis, hanc proprietatem habentibus quantis attribuatur; saltem è nominis istius assignatione nulla potest obscuritas oriri. In quo igitur (obsecro) consistit ubi versatur, unde resultat hæc obscuritas? Nusquam certè. Nisi quis proportionalitatis arcanam nescio quam naturam, omni definitionem ingrediente proprietate priorem somniet. Verùm judicii sui rationes ac firmamenta subjicit; illas & hæc breviter expendamus: *Ignoratur* (ait) *an in natura reperiri possint quatuor quantitates habentes talem passionem, quòd nimirum infinitæ æquemultiplices antecedentium, si comparentur cum infinitis æquemultiplicibus consequentium debeant unà excedere, vel unà deficere, vel unà æquari.* Respondeo, non ignoratur hoc, quoniam exemplis perspicuis commonstrari potest, existere complura 4 quanta dictâ conditione dotata. Quòd si non constaret, haud quaquam hæc definitio posset ad usum applicari. Nam quoties applicatur, tot suppeditantur exempla quantorum hâc proprietate gaudentium. Non aliter ignoratur dari figuram æquales ra-

radios habentem, donec id ex generatione quapiam ad sensum, vel ad mentem, ex aliquo satis evidente discursu certius fiat. Itaque nihil valet hoc primum ἐπιχείρημα. Rursus, *Infinitæ* (inquit) *infinitæ istæ comparationes comprehendi non possunt; & ideo hæc passio non erit evidentissima, qualis debet esse illa, quæ principium scientiæ constituit.* Primùm, demiror ab acutissimo viro ejusmodi discursus institui, tum (nè repetam quæ ad similes discursus antea reposui) sciscitur an non experientia doceat ab Euclide, Archimede, cæteris plerisque Geometris sæpè, minimóque negotio demonstrari, quòd multis quantis (triangulis videlicet & parallelogrammis æquè altis ac suis basibus, pyramidibus, prismatibus, conis, cylindris itidem cum suis basibus, circulis & sphæris cum suis similibus sectoribus, angulis cum arcubus quibus insistunt, spatia uniformi velocitate percursa cum suis temporibus, momenta ponderum cum suis à centro stateræ distantiis, innumerisque talibus) conveniat hæc proprietas? Quomodo igitur incomprehensibilis esse potest? Secundò, dico nullam hîc comparationum infinitatem supponi, non certè magis quàm in quavis enunciatione generali, terminorum universalitas infinitatem supponit. Nam quod habetur in definitione καθ' ὁποιάνοῦν πολλαπλασιασμὸν (per quamcunque multiplicationem) quid aliud quàm universalitatem innuit conditionis præstitutæ; non ex omnium singularium lustratione, vel inductiva quavis collectione, sed ex universali ratiocinio comprobandæ? Requiritur nempe duntaxat, ut omnia æquemultiplicia an-

antecedentium taliter afficiantur erga omnia consequentium æquemultiplicia; taliter (inquam) afficiantur, hoc est, idem rationis genus, seu modum eundem obtineant, excessum, defectum, aut æqualitatem. Si subest hîc incomprehensibilis aliqua infinitas, etiam omnia scientiarum omnium theoremata, universalibus quippe terminis constantia pariter incomprehensibilia sint oportet. Neque comprehensibilis erit hæc propositio, Omnis homo est animal, quoniam in ea affirmatur animalitatis proprietatem infinitis qui existere possunt hominibus competere. Tertiò, manifestissimè refellit hanc instantiam ipsa definitionis hujus applicatio; quæ non aliter procedit, quàm unam quamvis indeterminatam & arbitrariam multiplicationem antecedentium unámque consequentium pro omnibus, quæ cogitari possunt ipsorum multiplicationibus substituendo; prorsus eodem modo quo solent universales quæcunque propositiones applicari. Nulla deprehenditur hîc infinitas, ambages nullæ, sed argumentatio simplicissima. Nec igitur hæc ratio quicquam efficit. Cæterum instat tertiò, *Licet hypothetice concedatur adhuc ignotum est, quidnam ex ambage istâ infinitarum comparationum colligi debeat.* Repono nihil opus esse ut quid hypothetice concedatur, potest enim asseri positivè, potest velis nolis extorqueri reipsâ dari quanta tali conditione prædita, quod multoties ostendimus. Dein, percontor quid sibi velit *ignotum est quid colligi debeat*; nihil hîc quicquam colligitur: at verò saltem fit, id quod in omni definitione fieri solet, aliquâ conditione seu proprietate præditis

ditis quantis nomen imponitur, æqualem scilicet rationem habentium aut proportionalium nomen imponitur quantis ità conditionatis aut affectis. Ex quo poſtea colligitur, ſi quando per diſcurſum aut aliunde patet hanc conditionem quibuſvis quantis convenire, quòd illa quanta proportionalia ſunt. Addo, quòd male rurſus ambagem intrepat infinitarum comparationum, quæ nuſquam hic ullâ comparet. Sed inſtat porrò; *Nam nec ipſe Clavius exvedità & lumine naturæ colligere potuit, ex paſſione æquemultiplicium in magnitudinibus commenſurabilibus proportionalitatem, ſed coactus fuit hoc demonſtrare in ſuis illis quatuor propoſitionibus. Sed quomodo erit notiſſima illa paſſio, quæ abſque demonſtratione acceptari non poteſt in magnitudinibus commenſurabilibus?* Reſpondeo, ad hoc ut proprietas aliqua non injuriâ definitionem ingredi poſſit nihil referri quomodo demonſtretur, aut demonſtrari poſſit ex alia quavis proprietate præſuppoſitâ; alias, ut antehac oſtenſum, nulla definitio daretur bona, poſſint enim omnes ita demonſtrari. Secundò, quod Clavius proprietatem hanc ex alia ſymmetrorum proportionalium definitione (non quidem in quatuor, aſt in uno ex quatuor, nec illo perquam intricatè prolixéve demonſtrato theoremate) deduxerit, id non propterea fecit (opinor) quia neceſſe fuit ut reciperetur hæc proprietas eam demonſtrari; nec ut ejus evidentiam propalaret; ſed ut hujuſce conſenſum & connexionem cum altera ſymmetrorum bene nota paſſione monſtraret. Id quod conari vel efficere, nihil hujus proprietatis aliunde per exempla notæ (vel ne-

noscibilis) evidentiæ præjudicat. Porrò tertiò, licèt (hoc ei demus) hæc non sit notissima passio quantorum commensurabilium eandem rationem habentium, ut talium; nil tamen impedit quin sit generalium, omnibus tam symmetris quàm asymmetris proportionalibus convenientium, passionum notissima; quódque de facto notissima sit, experientia suadere videtur, quoniam etsi complures operâ maximâ contenderint, nemo quòd sciam hactenus genuinam aliquam hâc notiorem assignaverit. Quinimo denique, nullius hypothesis possibilitas evidentior esse potest, illâ quâ subnititur hæc definitio. Non igitur ulla potest proportionalium evidentior passio demonstrari; nec igitur succedit hæc argumentatio. Sed Euclidem ictu tandem atrocissimo ferit, & tantùm non prosternit, ipso suo testimonio reum, & proprio tacitè judicio condemnatum. *Insufficiens* (inquit) *judicata fuit ab ipsomet Euclide, quando proportionalitatem commensurabilem (commensurabilium vult dicere) iterum libro septimo definivit.* Ad hanc criminationem respondeo prorsus inficiando, quòd eapropter Euclides hanc definitionem suam insufficientem judicavit, quoniam in Elem. VII. adhibuit aliam; nec enim hanc si insufficientem ipse judicâsset, omnino adhibuisset, sed aut nullam tradidisset, aut aliam investigâsset. Abhorruit hoc ab Euclides cùm ingenio tum instituto sibi minùs probata, nedum improbata proferre; suam ut sciens prudens στοιχείωσιν insufficientibus principiis contaminaret. E contra potiùs quia septimi elementi definitionem omnigenæ proportionalitati deprehendit

hendit haud competentem, ſolis utpote ſymmetrorum proportionalitatibus adaptabilem; hanc vero comperit univerſis congruam, idcirco dum hic loci generalem iniret analogiæ tractatum, illa rejectâ hanc amplexatus eſt, jure meritóque. Illam verò (poſtea vel prius haud dixero) ſymmetris proportionalibus applicuit, non tam neceſſitatis quàm commoditatis gratiâ, quia nonnihil ad vulgarem captum iſtius ſpecialis materiæ reſpectu facilior ac ſimplicior videbatur. Neque mirandum adeò cùm Arithmeticam theoriam ſeparatim, & ab aliis independenter ſuſciperet pertractandam, ſimpliciſſimam delegiſſe proprietatem, quâ numericas analogias determinaret, etſi neutiquam illa conveniret aliis analogiis, neque generali proportionalitatum doctrinæ ſufficeret. Quòd autem liceat, & nonnunquam expediat (varietatis ac facilitatis causâ) ſpeciales doctrinas è ſpecialibus principiis extruere (Logicæ communi rigore quantumvis adverſante) quamvis ad plenam Euclidis defenſionem ſpectat, extra tamen præſentem controverſiam ponitur aſſerere, neque nos idcirco quæſtionem illam nunc attingemus. Sufficiat indicaſſe non exinde, quod pertendit adverſarius, ſequi quia particularem definitionem alibi particulari materiæ accommodavit Euclides, quod ideò generalem hanc, & materiæ generali adaptatam definitionem ipſe ſuam improbârit, aut inſufficientem judicârit. Ex hiſce tandem patet quod haud firmis nitiatur præmiſſis, quam Borellus ſubjicit concluſio: *certum ergo eſt obſcuram & difficilem eſſe proprietatem proportionalium*

nalium definitionis sextæ, propterea quòd nedum evidenter naturam proportionalium incommensurabilium declarat, ut vicesima definitio septimi facit, sed rursus quod mirum est neque manifestat ea, quæ de ipsa definienda præcognovimus. (Interpono, quòd sæpiùs inculcatum est, nullam esse proportionalium naturam dictâ proprietate priorem, nec à nobis ante definitionem de iis quicquam, distinctè saltem & certò præcognosci. Sed pergit) *Nam ex eo quòd quatuor magnitudinum æquemultiplices habent illam conditionem excessûs vel defectûs minimè percipitur quando aut quomodo, si antecedentes unà excedant aut deficiant à suis consequentibus, sint proportionales, neque si excessus sint inter se æquales, necne.* Quæ Borelli verba perquam obscura videntur & ambigua; quicquid verò significant, mihi certum est, ea nobis haud quaquam officere. Nam ex eo quòd quatuor quantorum æquemultiplices illam habent conditionem, omnino percipitur iis proportionalium nomen congruere, neque refert aliud quid percipi. Post hæc omnia superest una, præque reliquis gravissima, (verâ modò suppositione niteretur) objectio submovenda. *Nec demum* (ait) *hæc minima cognitio ex dicta proprietate colligi potest, quod scilicet quatuor magnitudines sint proportionales, cùm prima excedit secundam, necessariò tertia magnitudo quartam superare debet, quod Clavius confitetur in prop. 16. lib. 5. Elem.* Respondeo 1. Clavio falsam, ut videtur, confessionem impingi, nihil in loco citato tale deprehendo. 2. Si non ex illa proprietate, quomodo demonstravit Euclides, quando tullam proportionalium alteram definitionem

præmiserit? Per eam certè demonstravit, etsi non immediatè. Et quis nescit in plerisque demonstrationibus subjecti proprietatem non immediatè ex ipsius definitione deduci. Sufficit id fieri mediatè per proprietates alias è subjecti definitione priùs enatas. 3. Addo, quamvis Clavius non collegerit, tamen immediatè, neque difficilè, colligi posse cognitionem istam ex hac ipsa proprietate; quòd sic (apagogico discursu) probo: Sit A.B :: C.D, juxta definitionem nostram; sitque A▭B, dico fore C▭D. Si negas, esto C═ vel ▭D, & multiplicentur omnes termini per eundem quemvis numerum M; éstque ob A▭B (ex hypothesi) etiam MA▭MB; & ob C▭D erit MC▭MD. Ergò non erit juxta definitionem A.B :: C.D, contra primam hypothesin; maléque negavit adversarius posito esse A▭B fore C▭D. Ita dicta cognitio (quam vocat) è nostra definitione prolicitur, & adversarii diluitur objectio. *Quis ergo* (demum infit objectator) *dicet sextam definitionem esse bonam, & principium scientiæ, si tam obscuram affert cognitionem & imperfectam.* Ego, coronidem imponens huic prolixæ disputationi, me non diffiteor esse qui (quicquid ille, quicquid alii contradixerint) asseveranter dicam quòd definitio sit in primis optima, quòd accommodatissimum huic ipsi scientiæ principium, quòd cognitionem suggerat evidentissimam & perfectissimam. Id quod mihi videor adversùs omnes contra nitentium assultus eviciisse; ita cùm non magis antiquitatis adductus reverentiâ, quàm rei verisimilitudine compulsus, Euclideam definitionem, & ab eo pendentem proportionalitatis do-

doctrinam, utcunque vindicârim; proximè ſequitur, ut quod pollicitus ſum aliarum quas ei ſubrogandas autumârunt definitiones ac methodos paucis perſtringam, quo conſtabit ampliùs Euclideæ doctrinæ præſtantia; neque non quali neceſſitate conſtrictus, quorúmque devitandorum incommodorum gratiâ, toties memoratam huc proprietatem adſciverit. Prima methodus eſt illorum, qui cenſent ſimilitudinem vel identitatem reſpectûs eſſe paſſionem proportionalium notiſſimam, à qua debent definiri. Juxta quam exiſtimant præcipuas nonnullas Elem. V. propoſitiones axiomatum loco habendas, lumine quippe naturali perſpicuas, & probationem nullam deſiderantes; tum ex iis reliquas proportionalium affectiones deducunt. Hanc ſententiam jampridem vir doctiſſimus Johannes Benedictus amplexatus eſſe dicitur; eam verò (ſaltem ei reipsâ non diſparem) nuperrimè vir acutiſſimus And. Tacquetus in formam redegit & expolivit. Hæc methodus inſufficientiæ arguitur à Borello, mihíque laborare videtur multiplici defectu. Nempe primò, videtur inepta quædam in hujuſcemodi definitionibus tautologia committi, próq; definitionibus enunciationes apponi prorſus identicas; tales ſcilicet ſimiles (vel eaſdem) rationes obtinent quanta, quæ ſimiles (vel eoſdem) in quantitate reſpectus habent; h.e (quid enim aliud intelligi datur) quæ ſimiles (vel eaſdem) rationes habent. An non hoc eſt idem per idem definire? num hoc eſt rei propoſitæ naturam declarare? num demonſtrandi principium ſubſternere? vel ſaltem, quod eodem recidit. Nihil hoc videtur aliud, quàm per ſo-

lum genus, adhibitâ nullâ differentiâ definire, tali pacto: identitas rationis est identitas respectûs; eandem rationem habent, quæ habent eundem respectum. Num obtestor hujusmodi definitio conseri meretur perfecta? Secundò, similitudo vel identitas respectûs vocabula perquam æquivoca sunt, & significationis incertæ, nullum audientis animo distinctum conceptum imprimentia. Multæ siquidem similitudinis & identitatis species, multi gradus sunt. Ergò nisi distinctio quædam ulterior excogitetur (hoc est, nisi passio quædam hac notior & specialior adscisca tur) ex hoc vocabulo nil elucebit. Quare definitiones laxis hujusmodi terminis constantes nihil explicant, inutiles & minime scientificæ sunt. Tertiò, asymmetra quanta quo modo se respiciunt, vix comprehendi potest aut explicari; non ergò quid sit illa simili vel eodem se modo respicere, perspici potest immediatè; neque quando tali respectûs similitudine sunt affecta dignosci. Videatur Borellus his oppositam Tacqueti responsionem impugnans, nam mihi deproperandum. Ex his verò consectatur quarto, quòd quæ de proportionalibus vel assumant axiomata, vel demonstrare præ se ferunt theoremata qui huic methodo insistunt, illa nec assumi rectè, nec verè demonstrari. Nam quomodo sumi vel probari potest aliquid proportionalibus competere, quum ipsum quid sit esse proportionalia nondum certò constet, aut clarè concipiatur? Quare nullo fundamento nititur hæc methodus, & quasi de nihilo tractat. Ut præteream, quod adeò multa gra-

tis arripere, vel indemonstrata petere, & quasi emendicare, Geometriæ dignitati nonnihil deroget, & nimiam inferat Mathesi licentiam. His adjicio quinto, quòd hujusmodi definitiones nequeunt specialibus materiis adaptari; sed earum proportionalitas per intermedias, eásque bene prolixis & intricatis ratiociniis fultas conclusiones demonstratur. Ut patebit Tacquetianam primæ vel ultimæ propos. Elem. VI. demonstrationem inspectanti. Non ibi proportionalium definitio citata comparet, sed alia propositio, propria Tacqueto, ab eo alibi longo (illóque indirecto & apagogico discursu) comprobata. Quod mihi signum videtur haud dubium incommodæ, & imperfectæ definitionis præstratæ, methodíque parum scientificæ. His defectibus breviter animadversis, obnoxia videtur methodus Tacqueti; quorum nullus Euclideæ doctrinæ potest objectari. Nihil isthic nugatorium, ambiguum, incomprehensibile; recto pede procedunt, firmo tibicine fulciuntur omnia, pauciſſimæ præstruuntur hypotheses, & denique (quod præstantissimæ definitionis optimum est judicium) specialium materiarum analogiæ immediato directóque discursu ex ipsis ejus visceribus derivantur; ut patebit omnes in elementis, aut alibi prostantes ejus adplicationes, & nominatim allegatas libri sexti propositiones consulenti. Verùm adhuc obiter adnotabo, quòd A. Tacqueti methodum attinet, eum longè (meo quidem judicio) consultiùs facturum, si per illud quod affert, & qualitercunque demonstrat, proportionalitatis indicium definivisset ipsa *Part 2. th. 5.*

proportionalia; nec non ejuſce definitionis ſubſidio reliquas (quod opinor potuit, & ipſe ſe potuiſſe profitetur) proportionalium affectiones demonſtráſſet. Id agens Euclidem fuiſſet æmulatus, & ſcientificâ viâ proceſſiſſet, incommodæ quæ attigimus pleraque devitâſſet, & eodem quo Euclides modo defendi potuiſſet. Cui affinem ego (quanquam ut videtur aliquanto faciliorem) hanc proportionalium affectionem exhibeo, quâ ſubnititur hujuſmodi definitio. Proportionalia quanta dicantur, cum antecedentes in conſequentium æquemultiplicibus (vel conſequentes in antecedentium æquemultiplicibus) quibuſvis æquali numero continentur (vel illa ab his æquè toties auferri poſſunt). E cujuſmodi quidem definitione totâ proportionalium doctrina non difficilè poſſet extrui, juxta progreſſum Euclideo perſimilem, attamen ut exiſtimo nequaquam eo ſuccinctiorem aut dilucidiorem. Cui ſaltem objici poſſet, quicquid Euclideæ methodo objectatur; neque non aliquid fortaſſis præterea, è quantorum aſymmetria petitum, à quo liberior eſt Euclidea doctrina: quapropter operæ pretium eſſe non ſentio quicquam innovare. Tacqueto jam, & cum eo ſentientibus dimiſſis D. Hobbii methodum quaſi per transennam inſpectabo. Analogiam is ita definit (ipſo judice perquam accuratè) ratio Geometrica rationi Geometricæ eadem eſt, quando cauſa aliqua æqualibus temporibus æquala, faciens utramque rationem determinans eadem aſſignari poteſt. De qua definitione temperare mihi nequeo quin dicam, ſi quis omnia Mathematicorum (veterum,

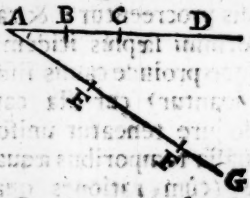
De Corp. 13. § 6. *Dial.* 2 p. 49.

re-

recentiorum (ſcrinia pervolutet, nuſquam opinor comperiet ullam rei, quam illuſtrandam accipit, offuſcandæ magis comparatam, nullam pluribus & gravioribus vitiis laborantem. Nam & intellectu difficilis ac anceps eſt (adeò quidem ut mihi conſtet ab authore ſuo non penitus intellectam) & à propoſito commiſcet admodum aliena; & neſcio an ullis (certè perpaucis) materiis accommodari poteſt; & quæ illi ſuperſtruitur doctrina tota ſic infirma, confuſa, præpoſtera (nec non in aliquibus magni momenti falſa) nihil ut uſquam ſimile præſtitum viderim in Mathematicis. Illam certè (Phyſicam potiùs quàm Mathematicam) definitionem dum excutio, nihil video quod probem, nihil ferè quod improbem, adeò nihil explicitum continet aut evolutum. Quid ſit rationem ab aliqua cauſa determinari, vel quomodo determinetur, haud explicat, & per ſe ſatis obſcurum eſt. Cur eandem cauſam ingerat, non liquet (cùm ſæpiùs etiam rationum ſingularum homogenei termini diverſimodis cauſis procreentur; & rationum collatarum termini ſæpiùs itidem heterogenei fint, nulliſque proinde cauſis iiſdem determinabiles videantur) cur iſta cauſa determinans rigido jure teneatur uniformiter agere, vel æqualia temporibus æqualibus effecta producere (cùm rationes quantorum inæquali quantumvis impetu productorum æquari poſſint) haud adeò cuilibet in propatulo. Quamobrem deinde rationum æqualium expoſitioni generalis particularis interveniat temporum conſideratio, perſpici nequit. Id certè conſtat nihil horum ad

ana-

analogiam necessariò pertinere vel accedere. Cùm e.g. dico duo quanta suis æquemultiplis proportionari, quænam isthic rogo causæ cujusvis facientis æqualia temporibus æqualibus incidat mentio, nisi perquam impertinenter & importunè? Cùm sphæram & cylindrum ei circumscriptam proportionales enuncio bessi vel alsi, quam oro fuerit in promptu causâ comminisci, quæ temporibus iisdem æqualia patrans facinora rationes istas determinet corporum, & ponderum, vel numerorum? Imo cùm ostendere cupio duo tempora duobus spatiis proportionalia fore, quænam causa temporibus æqualibus æqualia conficiens has unquam determinabit rationes? num propositorum temporum ratio determinabitur ab ipsis hisce vel ab aliis temporibus? Sed andabata sum, & in obscuro specu dimico. Quod ad definitionis applicationem spectat, nec in ea quicquam extra meras tenebras, confusiones, discrepantias, comperio. Prima super hac basi fundata propositio sic habet:



Sint à puncto A moto uniformiter descriptæ duæ lineæ AD, AG; earum partes omnes contemporaneæ erunt binæ binis proportionales: hoc est, si AB, AF, & AC, AE, describantur iisdem temporibus, erunt AB, AC ipsis AE, AF proportionales. Id quod ex hac definitione (succinctiùs

ſtiùs & clariùs ejus ratiocinium exhibendo) ſic infert: Quoniam velocitas in AD, ob uniformitatem motûs, eſt ſemper eadem, ratio ꝛ̃ AB ad AC determinatur ex ſola temporum differentia. Nec non ex pari cauſa ipſorum AE, AF ratio determinatur ex differentia temporum. Eadem verò tempora ſunt hinc inde, & eadem proinde temporum differentia. Ergo eadem cauſa determinans has rationes aſſignatur (hactenus aliquid aſſequor; at porrò ſubjicit) cauſa verò quæ rationem utriuſque ſic determinat, æqualia efficit temporibus æqualibus; eſt enim motus uniformis (hîc incipio excutire, & ceſpitare, priùs pro cauſa determinante temporum aſſignabatur differentia; jam verò, quoniam abſonum videbatur differentiam temporum æqualia facere temporibus æqualibus) alia cauſa ſubſtituitur motûs uniformis; quamvis nec hîc unicus, at duo ſaltem motus uniformes habentur. Num hæc conſentiunt ſibi? num aliquid liquidò conficiunt? num ſuam ipſe definitionem aſſequitur, aut applicare novit? Sed utcunque concludit; itaque per definitionem proximè præcedentem AB ad AC, & AE ad AF, ſunt proportionales). Ex hoc particulari, taliterque demonſtrato theoremate, generalia de proportionalibus theoremata; generales complectentia proportionalium affectiones, pleraque cum illis eadem, quæ in quinto habentur elemento, ceu corollaria videri vult deducere: quis hoc ferat, ex uno exemplo generalem adſtrui doctrinam; quæ de duabus lineis, duobuſque temporibus utcunque poſſent oſtendi, ea ſtatim ad omnes extendi

ma-

materias? Quasi verò proportionalitas omnis in solis temporibus, & uniformi motu peractis spatiis versaretur & consisteret? Ut alia conticescam hujus methodi parum firma vel sana. [Nempe videtur huic accidisse viro, quod illis consuevit evenire, qui cùm diutiùs in rem aliquam vivido colore tinctam oculorum intenderint aciem, omnia videntur isto colore diluta conspicari: ita videtur hic Philosophus iis quæ de motu æquabili Galilæus conseripsit intentior, aut alias Physicorum in motuum contemplatione defixus, ad præconceptas quasdam de motu species, quæ magnitudinem & quantitatem spectant omnia retulisse. Sed in omni re, prout vulgò fertur, Qui pauca respicit male judicat.] Hæc cùm ita se habeant, non est quòd novellam hanc methodum ullatenus moremur. Enimverò fiet injuria doctrinæ Euclideæ, si cum hac conferatur tam imbecilla tam inepta? Succedit proximè breviter attingenda, quam in opere proponit Geometrico vir eruditissimus. Affirmit is definitionis loco, rationes æquales esse, cùm antecedentibus per consequentia divisis quoti sibimet æquantur. Quæ sanè definitio minimè differt ab illa, quam Euclides adhibet in Elem. VII. pro speciali numerorum doctrina. Sed ne proba sit & accurata proportionalitatis universim sumptæ definitio, videntur hæc obstare. Primò, quòd constituta nondum proportionalitatis doctrinâ, vel antecedenter ad ipsam difficile conceptu sit quid sit ista divisio quantorum, aut quomodo peragatur; quid nempe sit lineam dividi per lineam, aut corpus per corpus;

pus; quomodo pondus à pondere, tempus a tempore dividatur. Sunt quidem linearum & aliorum quantorum divisio quædam & multiplicatio, Arithmeticis istis (à quibus nomen accipiunt) operationibus affines; ast quæ definiuntur & peraguntur ex proportionalium inventione, proportionalitatem adeò prænotam supponentes. Quinimo communiter apud Arithmeticos ipsa divisio per analogiam definitur, illam scilicet quæ divisorem inter ac dividendum, unitatem & quotum versatur. Non igitur tam idonea videtur divisio, vel ex ea resultans quotorum æqualitas proportionalitati generatim explicandæ. Dices fortè, satis facile concipi quid sit lineam in linea toties contineri, quoties pondus in pondere, vel tempus in tempore; nec aliud hîc intelligi. Rectè fateor; sed ad hoc requiritur, ut rationum inter se collatarum termini numeris repræsententur; id quod alterum fundat adversus hanc methodum argumentum; nempe secundò, quòd proportionalitatem solis numeris alligare videatur; & quantorum rationes haud aliter inter se comparabiles statuit, nisi quatenus ipsa quanta numeris denominantur. Quoties enim unum in altero continetur dispicere, nil aliud est quàm ipsorum in numeris proportionem exhibere, vel ea numeris denominare. Verùm etsi quanta nullis repræsententur, aut exprimantur numeris (nec fortè repræsentari possint vel exprimi) tamen ipsorum rationes exhiberi, proportionalitates innotescere possunt, Euclideâ vel consimili methodo. Cùmque quantis immediatè conveniat ut talibus, & non ut ea nu-

numeris accidit significari, rationes ad se mutuas habere, rationibúsque consequenter inter se comparari, rei naturæ convenientius videtur, ut hæc generali modo determinentur, à numeris potiùs abstracta quàm iis subjecta. Porrò tertiò, quando rationum comparatarum termini sunt asymmetri, consequentes in antecedentibus non continentur aliquoties, adeoque peragi nequeunt accuratæ divisiones, nec ulli distinctè comprehensibiles quoti exhiberi. Quoti verò sub confusione quadam imaginarii, quando vel quomodo sibimet æquentur, haud ita fuerit in promptu discernere, vel ἀποδεικτικῶς ostendere. Quare vix poterit hæc definitio speciales ad usus accommodari, quæ definitionis est imperfectio ferè potissima. Breviter, quæ contra Tacquetti methodum disputata sunt, adversùs hanc æquè militant, ab ea vix aut ne vix reipsà discrepantem. Sed enim aliam præclarus idem vir definitionem innuit; *Si quis* (inquit) *tamen mallet affectionis alicujus opem in auxilium advocare, quo demonstrationes commodiùs procedant, ego nullam potiorem novi hâc; si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto à mediis, & contrà.* De quo nihil amplius dicam, quàm propositam istam affectionem non esse generalem, & proportionalibus (juxta nomen receptum) adæquatum. Ductus enim & multiplicatio numeris in se, vel in alia quanta propriè solis convenit; proximè per similitudinem quandam lineis in se, vel in superficies per motum parallelum. Sed lineas in corpora, pondera in tempora duci seu multiplicari, quis concepe-

rit?

rit? Sint duo pondera A, B duobus temporibus Y, Z proportionalia, dic mihi quid proveniat ex pondere A ducto in tempus Z, nil prorsus imaginabile. Non ergo stricte quadrat hæc affectio proportionalitati generatim definiendæ; numerorum saltem & linearum, proportionalitati qualitercunque determinandæ possit inservire. Sed jam ultimò restat, ut de Borelli methodo feramus sententiam; & ne tanti viri meritis detrahere videamur, agnoscimus ultrò primùm doctrinam ejus, quantùm percipimus, admodum esse firmam, & bene fundatam. Fatemur ab eo proportionalium affectiones præcipuas è suis ipsius definitionibus ac principiis ritè deductas esse, probéque demonstratas. Non abnuimus ejus methodum in se spectatam satis esse pulchram & elegantem, nec non à candidis ingeniis, si nulla daretur alia, haberi posse pro sufficiente, & satis absoluta. Veruntamen eam cum Euclidea comparando quosdam in illo fas sit egregio insperſos deprendere corpore nævos; cumque pleraque non displiceant, hæc utcunque minùs arrident. Primò, quòd cùm æqualitas omnigenis quantorum rationibus (ῥητοῖς καὶ ἀῤῥήτοις) æquè conveniat, eique congruant universalia quædam symptomata, non tamen hîc ea simul omnis universim, sed ritu τῶν κατὰ μέρος ἓν (quæ vocat Philosophus) particulatim & per species successivè definitur. Nam primò rationum effabilium æqualitas ex suo quodam attributo speciali definitur, tum ex ea major & minor rationes effabiles; tum ex his tandem rationum ἀῤῥήτων æqualitas. Quorsum hæ generalis subjecti distractiones,

&

& per inferiora circuitus, si dari potest, & quidem exhibetur ab Euclide rationum æqualium omnigenarum (ut & inæqualium) proprietas aliqua generalis, ex qua possunt universaliter definiri? Si deprehendi poterit animalitatis in genere quæpiam essentialis proprietas, an non ex illa præstat (rei naturæ, scientiæ genio, bonæ Logicæ regulis exactiùs quadrat) animalitatem unâ vicè simul integram, quàm animalitatem hominis, & animalitatem bruti seorsim, unam ex alia definire? mihi certè videtur. Secundò, minùs placet quòd ineffabilium rationum æqualitas negativè definitur, ac ita quidem ut præmissas supponat & præcognitas inæqualium rationum definitiones. Nam universim definitionibus negativis præpollere censentur positivæ, seu perfectiorem, nobiliorem, & clariorem rerum notitiam progignentes. Tum præposterum videtur ex inæqualitate de æqualitate statuere; quum hæc illâ prior, simplicior, stabilior videatur, & in se penitùs indivisibilis sit. Unde veteres; Nicomachus, Ἡ ἰσότης ἀόριστός ἐστι καθ' ἑαυτὴν καὶ ἀδιαίρετος. Damascius, Στοιχεῖόν πως ἡ ἰσότης ἀναλογεῖ. Theon Smyrnæus. Ὁ δὲ ἰσότητος λόγος ἀρχικός, καὶ πρώτός ἐστι καὶ στοιχεῖον πάντων τῶν λεγομένων λόγων, καὶ τῶν καθ' αὑτὸς ἀναλογιῶν. Itaque rationum æqualitas inaqualitati postponi videtur immeritò, perque illam statui dijudicanda. Annon rectiùs Euclides æqualitatem primò per affectionem quandam positivam, & inæqualitatem respondenter ex alia contraria proprietate definivit? Tertiò adverto, prolixitatem hujusce doctrinæ, quæ per longiusculorum de-

Nicom. l. 2.
Vide Bull. notis in Theon. p. 273.
Theon. c. 51

definitionum ambages vix illud assequitur (ut rationum scilicet æqualitatem ab ipsarum inæqualitate disterminet) quod duabus tantùm (iisque si rem bene perpendamus multò brevioribus & simplicioribus) exequitur Euclides. Idem observari potest in toto doctrinarum processu, ubique multò paucioribus syllogismis rem conficit Euclides. Porrò quarto, adnoto Borellianas propositiones ac demonstrationes inspicienti compertum iri, quòd in illa sua methodo præcipua proportionalitatum symptomata, non nisi per discursus eliciuntur obliquos & apagogicos. Id quod nimis arguit principia non optimè constituta. Certè docet philosophus, & omnes fatentur ejusmodi ratiociniis haud ita perspicuam animóque blandientem comparari scientiam. Neque mirum è definitionum negativarum ambitus anfractuosas promanare demonstrationes. Annon præhabendus Euclides eadem è definitionibus positivis immediato directóque colligens ratiocinio? Quintò, mihi potissimùm displicet & vitio vertitur harum definitionum ad speciales materias accommodatio; vel potiùs quòd ad eas commode nequeunt applicari. Nec enim definitionum ope statim innotescit, aut ex iis prompte deducitur rerum proportionalitas, sed ex intermediis propositionibus, iisque non adeò comprehensu facilibus, & per indirectam argumentationem comprobatis demonstratur. Inspicite sultis demonstrationes primi postremíque theorematis Elementi sexti, quæ apud Borellum sunt prima quarti & secunda quinti, rem ita

comperietis habere; neque non fortaſſe mecum judicabitis haud rectè à Borello doctrinæ ſuæ præ Euclidea evidentiam jactitari. Etenim evidentia doctrinæ præcipuè comparet, & conſiſtit in uſu, facilique definitionum primarum ad ſingulas aut ſpeciales materias adaptabilitate; nec ulla major eſt harum virtus, quàm ut immediatè conſtare poſſit, eas rebus ſubjectis convenire. De ſuis hoc clariſſimè monſtravit Euclides, non ita de ſuis Borellus. Quidni pronunciemus igitur ab illo præſtita hujus conatibus, utlibet egregiis, anteſtare. Hæc breviter animadverti non ut laudi quicquam derogarem præclari viri, ſed ut Euclideæ doctrinæ præſtantiam illuſtrarem, unáque Geometras veteres illam amplexos, illi acquieſcentes defenderem, auguſtiſſimum imprimis Mathematicorum principem Archimedem illi ſuum calculum apponentem, illum quoties uſus poſtulat uſurpantem. Quin addo, & cum hoc elogio præfixam hanc diſputationem claudo, nihil extare (me judice) in toto Elementorum opere proportionalitatum doctrinam ſubtiliùs inventum, ſolidiùs ſtabilitum, accuratiùs pertractatum. Id quod mihi cùm hanc ingrederer de rationibus & analogiis σκέψιν ac θεωρίαν præcipuè fuit in animo declarare. Quâ jam operâ non indiligenter perfecto ſecedendum eſt; ut tamen doleat mihi præter ſpem ac propoſitum accidiſſe, quòd neque totam hanc proportionalis materiam exhaurire potuerim; neque quæ de magnitudinum determinatione, ſimilitudine, generatione

tione ſuccurrebant dictu forſan haud inutilia, nec injucunda proponere. Reſervanda proinde vel ſupprimenda pro capiendo poſtmodum conſilio. Vos interim auditores optimi à bono Deo valete.

FINIS.

UMI

ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis.

Incerti temporis hæ sunt ultimæ Lectiones, neque aliquem ad annum affixæ.

LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli*. 1684.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

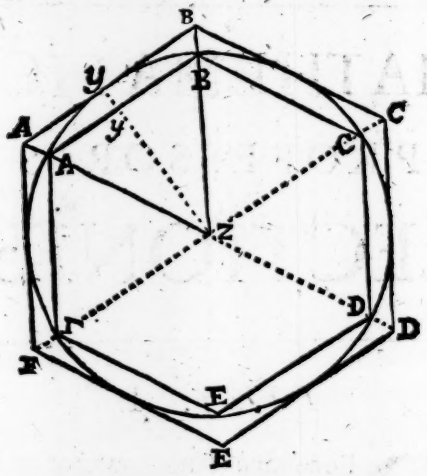
LECT. I.

PRopositum est nobis methodum exponere, quâ Archimedes præclara sua theoremata, libris qui extant comprehensa, adinvenit; subtilissimæ mentis istius utcunq; vestigia persequendo. Conabimur autem id efficere singulas materias ad problemata revocando, qualia nimirum ille sibi solvenda proponebat, & è quorum solutione cùm theoremata sua, tum ipsorum demonstrationes, deducebat. (Unde patebit qualem analysin, & quam nostræ modernæ similem exercuerit.)

PROBL. I.
De circuli dimensione.

Ordinatæ figuræ (ABCDEF) circulo inscriptæ vel circumscriptæ, par triangulum

(aut parallelogrammum) rectangulum invenire.



Ab Z circuli centro ducatur ZY perpendicularis ad unum quodvis figuræ latus AB, & connectantur rectæ ZA, ZB. * Evidens est triangulum AZB æquari rectangulo ab ZY & ½AB. Similitérque resolvendo totam figuram in ejusmodi triangula (ipsis scilicet AZB & sibi mutuo æquilatera) singula æquabuntur rectangulo ex dimidia sua base, & altitudine æquali ZY. Unde simul omnia æquabuntur rectangulo ex dimidia perimetro figuræ, & ZY. Vel triangulo, cujus basis est tota perimeter, altitudo ZY. Quod est

* 41. 1 *Elem.*

THEOR. I.

Figura regularis circulo inscripta vel circumscripta, æquatur dimidio rectangulo ex pe-

perimetro & perpendiculari, à centro ad unum latus; vel triangulo, cujus basis æquatur perimetro figuræ, altitudo dictæ perpendiculari.

Nota] In figura circumscripta perpendicularis est radius circuli.

PROBL. II.

Invenire rectangulum (vel triangulum) æquale circulo.

Ponatur circulum esse figuram regularem, habentem latera indefinitè multa, & parva; & consequenter perimetrum circumferentiæ perpendicularem, è centro ad hæc latera, radio coincidere; hinc igitur, juxta præcedens,

THEOR. II.

Circulus æquatur dimidio rectangulo ex circumferentia & radio. (Vel triangulo, cujus basis æquatur circumferentiæ, altitudo radio.)

Hoc est, posito (ut semper posthac) circumferentiam vocari ϖ, & radium R (vel r) & diametrum δ (vel D) $\odot = \frac{r\varpi}{2} = \frac{\delta\varpi}{4}$.

Corollaria circulorum circumferentiæ se habent ut radii. Nam hoc similium figurarum, circulis inscriptarum aut circumscriptarum, competere perimetris, in *Elementis demonstratur. *Lem. 12

Secundùm indivisibilium hypothesin hoc theorema facilè sic ostenditur:

Super

Super AB, circuli BFG radium, erigatur perpendicularis BC æqualis circumferentiæ circuli BFG, & connectatur AC. Tum in AB sumendo quodvis pro lubitu punctum D, centro A per D describatur circulus DHK; & ducatur DE ad BC parallela. Estque circumferentia BFG ad DHK [a], ut radius AB ad AD, hoc est [b], ut BC ad ED. Ergò quum circumferentia [c] BFG = BC, [d] erit circumferentia DHK = DE. Et simili ratione circumferentiæ omnes concentricæ constituentes

[a] *cor. prec.*
[b] 4.6.
[c] *Hyp.*
[d] 14.5.

tes circulum BFG æquantur parallelis rectis, quibus constat triangulum ABC. Unde circulus BFG triangulo ABC æquatur.

COROLL.

Simili discursu, sector quilibet circuli æquatur dimidio rectangulo ex arcu sectoris & radio circuli.

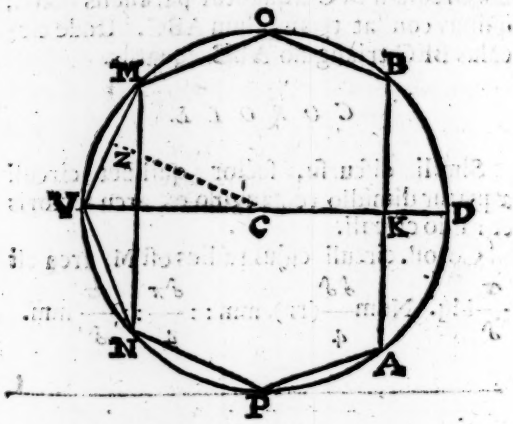
Coroll. circuli cujus radius est M, area est $\frac{\pi}{\delta}$Mq. Nam $\frac{\delta\delta}{4}$(rr). mm : : $\frac{\delta\pi}{4}$: : $\frac{\pi}{\delta}$ mm. *Cor. 2. 12.*

LECT. II.

De Sphæra & Cylindro.

Quæ de sphæra investigavit Archimedes, vel ad superficiem sphæricam pertinent, vel ad soliditatem. De superficie primò dispiciemus.

Sit



Sit circuli portio BVA, cujus axis VK transiens per circuli centrum C, & basim BA bisecans in K. Portioni autem inscribatur figura parilatera & æquilatera VMN PBA. Consideravit Archimedes, quòd si circa axem VD circumrotetur portio cum inscripta figura, descriptura sit circuli portio sphæricam portionem; figura verò solida constans cono MVN, & frustis conicis (vel cylindricis) OMPN, BOPA per circulos parallelos MN, OP, BA comprehensis; adeòque superficiem corporis inscripti è superficiebus constare conicis vel cylindricis MVN, OMNP, BOPA. Dein advertit, quò magis laterum figuræ multitudo augetur, eò magis figuram planam ad circulum, & solidam ad sphæram, & solidi superficiem ad superficiem sphæricam accedere; adeò quidem ut latera multiplicando perveniri tandem possit ad figuram, cujus superficies minori differat à

sphæ-

ſphæricæ portionis ſuperficie quàm aſſignato quolibet utlibet minimo defectu; adeóque ſphæræ ſuperficiem quodammodo haberi poſſe pro ejuſmodi figura indefinitam habente laterum multitudine; & cujus diſtantiam (CZ) à centro ſphæræ minimè differat à radio ſphæræ, vel in eum definat. Tandem igitur ſecum animo reputavit, ſi poſſet hujuſmodi figuræ ſuperficiem ad planam aliquam figuram, puta circulum, ſub generali qualibet ratione referre, inde ſibi conſtiturum quam ad planam talem figuram obtineret relationem ſphærica ſuperficies. Hoc perſcrutari aggreſſus eſt feliciter, hæc quæ ſequuntur problemata reſolvendo.

PROBL. I.

Invenire rectangulum æquale * laterali priſmatis erecti ſuperficiei.

* *Hoc eſt, baſibus exceptis.*

Manifeſtum eſt ſingulum parallelogrammum, eorum quibus conſtat lateralis priſmatis ſuperficies eſſe rectangulum ex latere priſmatis, & uno latere baſis; & proinde omnium iſtorum parallelogrammorum aggregatum: hoc eſt,

Lateralis erecti priſmatis ſuperficies, æquatur rectangulo ex latere priſmatis, & baſis perimetro. *Theor. I.*

PROBL. II.

Invenire rectangulum æquale * curvæ recti cylindri ſuperficiei.

* *Hoc eſt, demptis baſibus.*

Supponatur cylindrum eſſe priſma quoddam ſuper polygonam baſem, latera habentem

temindefinitè parva & multa (hoc est, super circulum) & ex præcedentibus liquet, quod

Theor. II. Curva recti cylindri superficies æquatur rectangulo ex latere ejus, & circumf. basis.

Coroll. 1. hinc. Curva cylindri superficies se habet ad basim ejusdem, ut latus cylindri ad dimidium radii, vel ut duplum lateris ad radium.

Sit enim L = lateri. Estque (ex hoc) $L\pi$ = superficiei, ac basis est $\frac{r\pi}{2}$. Atqui $L\pi$.

* 1.6. $\frac{r\pi}{2} :: {}^{*}\text{l}. \frac{r}{2} ::$ 2l.r.

Coroll. 2 etiam hinc. Superficies cylindrorum super basibus iisdem (vel æqualibus) sese habent ut latera: & habentium eadem vel æqualia latera, superficies sunt ut circumferentiæ basium, vel ut diametri, vel ut radii basium.

PROBL. III.

Invenire circulum æqualem datæ curvæ cylindri recti superficiei.

e 1 *Cor.* 2. *hujus.* Sit A radius quæsiti circuli. e Estque ⊙ rad. A. ⊙ rad. R. :: 2L. R. f Hoc est, Aq.

f *Cor.* 2. 12 Rq. :: 2L. R :: g 2LR. Rq. Quare Aq h = 2LR. i Unde 2L. A :: A.R.

g 1.5. vel L.A :: A.2R.

h 9.5.

i 17.6. Hinc,

Theor. III. Radius (A) circuli æqualis superficiei cylindri est media proportionalis inter latus

Archi. 13. *l.* cylindri (L) & basis diametrum (2R).

k 17.6. Nam (retrograde) quia L.A :: A.2R erit

l 1.6. k 2LR = Aq. Sed 2L.R l :: 2LR. Rq. m Er-

m 7.5. gò 2L. R :: Aq. Rq n ::

n *Cor.* 2. 12 ⊙ rad. A. ⊙ rad. R.

Unde

Unde per Coroll. 1. præcedentis erit ⊙ rad. Æqualis ſuperficiei cylindri. Q.E.D.

PROBL. IV.

Invenire rectangulum æquale laterali pyramidis æquilateræ, ſuper regulari baſe conſtitutæ, ſuperficiei.

Liquidò patet, ſingulum pyramidis ſuperficiem componens triangulum, æquari ipſius altitudini ductæ in dimidiam baſin. Unde triangulorum omnium aggregatum, hoc eſt,

Lateralis æquilateræ pyramidis ſuperficies æquatur communi triangulorum eam componentium altitudini ductæ in dimidiam baſis perimetrum. *Theor. IV.*

PROBL. V.

Invenire rectangulum æquale curvæ recti coni ſuperficiei.

Conus ſupponatur æquilatera pyramis ſuper regulari baſe indefinitè multilatera (hoc eſt, circulari) & conſequenter habens altitudinem triangulorum aſſurgentium æqualem lateri coni. Hinc ex præc.

Recti coni curva ſuperficies æquatur rectangulo ex latere coni, & dimidia circumferentia baſis. *Theor. V. Archim. 15. I.*

Coroll. 1. Curva coni ſuperficies ſe habet ad baſin ejuſdem, ut latus coni ad radium baſis.

Nam coni ſuperficies eſt $\frac{L\pi}{2}$; & baſis eſt $\frac{R\pi}{2}$. * Verùm $\frac{L\pi}{2}.\frac{R\pi}{2}$ :: L. R. co- * 1. 6.

Coroll. 2. Superficies conorum ſuper eadem baſi (vel æqualibus) ſe habent, ut latera. Et ſuperficies conorum habentium æqualia latera, ſe habent ut radii baſium.

PROBL. VI.

Circulum invenire parem datæ coni curvæ ſuperficiei.

Sit radius circuli quæſiti A. Quum igitur (ex Coroll. 1. ultimi) ſit ⊙ rad. A. ⊙ rad. R :: L. R. [o] Et id o Aq. Rq :: L. R. [p] :: LR. Rq. [q] Erit Aq = LR. [r] Quare L. A. :: A. R.

[o] *Cor* 2.12
[p] 1.6.
[q] 9.5.
[r] 17.6.

Hinc,

Theor. VI. Archim. 14. *I.*

Circulus habens radium (A) proportione medium inter coni latus (L) & baſis radium (R) æquatur curvæ coni ſuperficiei.

Nam quia L. A :: [s] A. R. erit LR = Aq. Verùm L. R :: [t] LR. Rq. [u] Ergò L. R :: Aq. Rq :: [x] ⊙ rad. A. ⊙ rad. R. Ergò (ex Coroll. 1. præc.) eſt ⊙ rad. A. æqualis ſuperficiei coni. Q. E. D.

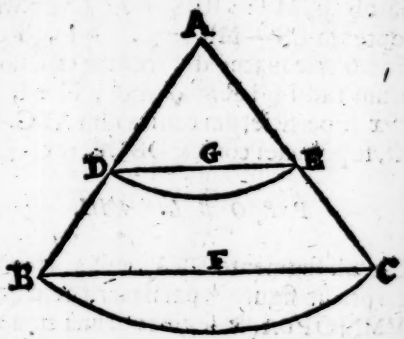
[s] *Hyp.*
[t] 1.6.
[u] 7.5.
[x] *Cor.* 2.12.

PROBL. VII.

In cono recto (ABC) invenire circulum æqualem ſuperficiei conicæ (DBCE) interceptæ planis parallelis (BC, DE).

Nota] Supponitur & BC triangulum per axem; & BC, DE communes hujus ſectiones cum planis parallelis. Unde BC, DE ſunt parallelæ per 16. 11.

Po-



Ponatur L=AB, & R=BF, & M=AD, & R=DG; & quæsiti circuli radius sit A. Et ob AB. BF :: [y] AD. DG, hoc est, L. R :: M. S. Erit LS=[z] MR; & [a] proinde LS—MR=o.

[y] 4.6. [z] 16.6. [a] 3.ax. 1.

Jam (per ultimum) superficies ABC æquatur circulo, cui radius $\sqrt{LR}$. Et superficies ADE circulo, cui radius $\sqrt{MS}$. Et [b] consequenter superficies DBCE, vel [c] ⊙ rad. A= ⊙ rad $\sqrt{LR}$— ⊙ rad. $\sqrt{MS}$. Unde Aq= LR—MS [d] = LR—MS+LS—MR [e] = L—M ×: R+S [f]

Square L—M. A :: A. R+S. Unde hoc est, DB. A :: A. BF+DG.

[b] *Cor.* 2. 12. [c] *Hyp.* [d] *Prius.* [e] *Sch.* 1. 2. [f] 16.6.

Circulus, habens radium (A) proportione medium inter interceptam parallelis planis (BC, DE) lateris partem (DBVE—M). & summam radiorum (BF+DG, vel R+S) circulorum qui in parallelis planis, æquatur conicæ superficiei (DBCE) parallelis planis interceptæ.

Theor. VII. Archim. 16.1.

Nam (analysis vestigiis insistendo) quia L—M. A [g] :: A. R+S. [h] Erit Aq= LR—MS+LS—MR. Hoc est, Aq=LR—MS

[g] *Hyp.* [h] 16.6.

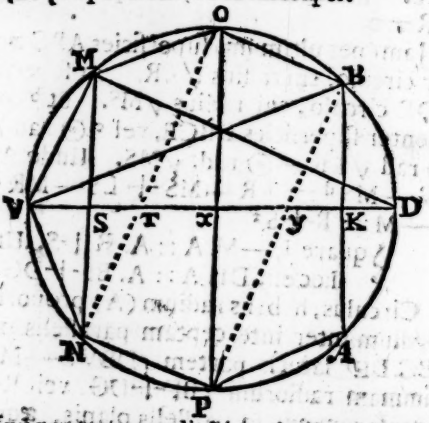
i 6.6. k 16.6. l 3.ax.1. m cor.2.12 n 6.hujus.

(quia ob L.M i :: R.S, k est LS=MR, & l propterea LS—MR=o). m Ergò circulus radio A æquatur differentiæ circulorum, quorum radii √LR & √MS n; id est, differentiæ superficierum conicarum ABC, ADE, id est, superficiei conicæ DBCE. Q.E.D.

PROBL. VIII.

Circuli segmento BVA (cujus axis VKD) inscripta sit figura * parilatera & æquilatera VMNOPBA, & segmento unà cum inscripta figura circa axem VK rotato; invenire circulum æqualem superficiei corporis ab inscripta figuræ revolutione procreati, sphæræque proportioni BVA inscripti.

* *Excepta base.* *Archim.* 32.1. 23.



Jungantur anguli hinc indè pariter distantes a vertice V rectis MN, OP, BA; & connectantur NO, PB, ac DM: liquet autem angulos VDM, VMN, MNO, N P, OPB, PBA, æqualibus insistentes arcubus æquari; & inde o parallelas esse rectas MN,

o 27.1.

MN, OP, BA; a trigona DMV, MSV, NST, OKT, PXY, BKY, similia fore.
P Quare DM. MV :: MS. VS :: NS. ST :: OX. TX :: PX. XY :: BK. YK. Q Unde ut DM ad MV, ita summa antecedentium MN + OP + BK ad summam consequentium respectivam VK. Ergò DM × VK = MV × :: MN + OP + R BK. Jam superficies coni MVN S æquatur circulo, cujus radius $\sqrt{VM \times MS}$. Et superficies OMNP T æquatur circulo, cujus radius est $\sqrt{\frac{MO \times : MS + OX}{VM}}$.

U Itémque superficies BOPA circulo, cujus radius est $\sqrt{\frac{OB \times OX + BK}{VM}}$. X Ergò tota superficies VMOBAPN æquatur circulo, cujus radius est $\sqrt{VM \times : 2\,MS + 2\,OX + \frac{BA}{2} KK}$. Hoc est, $\sqrt{VM \times : MN + OP + \frac{BA}{2}}$ hoc est, $\sqrt{DM \times VK}$. Unde,

P 4.6.
Q 12.5.
R $\frac{BA}{2}$
S 6 *hujus.*
T 7 *hujus.*
U 1.2.
X *Cor.* 2.12

Superficies solidi (VMOBAPN) sphæræ portioni (BVR) inscripti, productíque e revolutione figuræ parilateræ & æquilateræ (VMOBAPN) circuli portioni (BVA) inscriptæ, æquatur circulo, cujus radius est $\sqrt{DM \times VK}$ (existente DM rectâ, quæ ducitur ab extremo diametri VD, axem VK continentis, ad terminum lateris VM, vertici V conterminî)

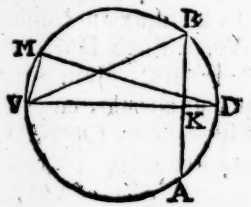
Theor. VII.

Coroll. Ducendo VB; quoniam DV × VK = VBq. Et DM ⌐ DV, liquet esse DM × VK ⌐ VBq. Et proinde circulum cujus radius est $\sqrt{DM \times VK}$, minorem esse circulo cujus radius VB; id est, superficiem solidi cujusvis modo præmonstrato descripti in sphæra, minorem esse circulo cujus radius

Cor. 8. & 17. 6.

PROBL. IX.

Circulum invenire parem ſuperficiei portionis ſphæricæ (BVA).



Si circuli ſegmento BVA, è cujus circa axem VA revolutione producta fuit ſphæræ portio, inſcribatur figura parilatera & æquilatera, cujus VM ſit unum latus, & ex iſtius figuræ rotatu producatur figura; ſuperficiem habens conſtantem è ſuperficiebus conicis, aut ex parte cylindricis (ſicut in præcedenti;) manifeſtum eſt ex ultimo Corollario, quòd hujus figuræ ſuperficies minor eſt circulo cujus radius VB; prout autem VM magnitudine minuitur, & conſequenter DM creſcit eò ad æqualitatem magis appropinquat; poſito igitur VM eſſe infinitè (vel indefinitè) parvam, figura plana ſegmento BUA coincidet, & ſolida figura cum ſphæræ portione BVA, & DM cum DV; & proinde ſuperficies inſcripti ſolidi, hoc eſt, ſphæricæ portionis ſuperficies, æquabitur circulo cujus radius VB. Hoc eſt,

Theor. IX. Archim. 36. & 37. l. Superficies ſphæricæ portionis (BVA) æquatur circulo, cujus radius eſt recta (VB) ducta à portionis vertice (V) ad circumferentiam baſis (BA). (Vel cujus radius eſt chorda

chorda ſubtendens dimidium arcum ſegmenti circularis, cujus revolutione ſphæræ portio procreatur).

COROLLARIA.

1. Superficies hemiſphærii (BVA) baſis ſuæ dupla eſt.

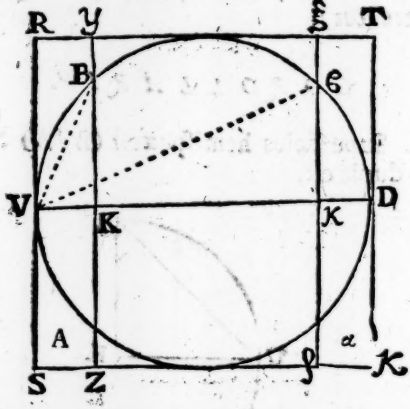
Nam per proximè præcedens ſuperficies hemiſphærii æquatur circulo cujus radius VB, hoc eſt, duplo circulo ad radium VK; quia VBq = VKq + BKq = 2VKq Unde conſectatur immediatè, quòd

2. Superficies totius ſphæræ quadrupla eſt maximi in ea ſphæra circuli; (vel æqualis circulo, cujus radius æquatur diametro ſphæræ.

Quod nobiliſſimum theorema demonſtrat Archimedes ſeparatim; quod non opus erat ut faceret adeò ſtatim deducitur è generali hoc theoremate. *Archim. 30. l.*

3. Sphæræ ſuperficies æquatur curvæ ſuperficiei cylindri circa ipſam deſcripti, hoc

est, cujus latus & basis diameter æquantur singula diametro sphæræ.



Nam (per 1. Coroll. 2. hujus) curva superficies cylindri se habet ad basin, ut latus ejus ad ½ radii basis, id est, ut diameter a ¼ diametri; id est ut superficies sphæræ ad maximum in sphæra circulum, vel ad basin cylindri. Ergò cylindri curva superficies æquatur superficiei sphæræ, imò generatim

4. Cujusvis portionis superficies (BVA) æquatur curvæ superficiei cylindri (RSYZ) habentis eandem altitudinem, vel axem (VK) & diametrum (YZ) æqualem sphæræ diametro (VD).

* 3. *hujus. Cor.* 8. 6. Nam superficies cylindrica RSZY * æquatur circulo cujus radius est √RY × YZ, id est, √VK × VD, id est, √VBq (nam DV. VB :: VB. VK) id est, superficiei portionis sphæricæ BVA.

5. Superficies portionum BVA, BDA se habent ut axes sui BV, BD.

Nam

Nam cylindricæ ſuperficies RSZY, TXZY, quibus hæ ſphæricæ æquantur, taliter ſe habent. Imò, 2 *Cor.* 2. *hujus.*

6. Sphæricarum quarumvis portionum (BVA, ϛVα) ſuperficies axibus ſuis (VK, VK) proportionales ſunt.

Nam & cylindricis ſuperficiebus, quibus æquantur, hoc convenit. 2 *Cor.* 2. *hujus.*

7. Sphærica ſuperficies ϛBAz parallelis planis ϛα, BA intercepta æquatur cylindricæ ſuperficiei ξYZζ iiſdem planis interceptæ.

Nam ſi à cylindrica ſuperficie ξRSζ, cui æquatur ſphærica ſuperficies ϛVα, detrahatur cylindrica ſuperficies YRSZ, cui æquatur ſphærica ſuperficies BVA, remanebit cylindrica ſuperficies ξYZζ æqualis ſphæricæ ſuperficiei ϛBAα. Unde quoque,

8. Zonæ, ſeu ſuperficies ſphæricæ parallelis circulis interceptæ, ſe habent ut axes ſui.

Quin ex hoc fœcundiſſimo theoremate, nobiliſſimo & utiliſſimo inter authoris noſtri inventa, complura deducantur conſectaria. Nobis hæc in præſens ſufficiant, declarandæ methodo, cui author inſiſtebat, in eo reperiendo. Proximâ Lectione, quâ ſoliditates portionum ſphæricarum ad conos & cylindros retulit, viâ dabimus operam enucleare.

LECT. III.

METhodum postremà vice conati sumus exponere qua Archimedes superficies conicas, cylindricas & præsertim sphæricas cum superficiebus planis comparavit, iis æquales circulos assignando. Nunc eadem brevitate modum expilcabimur, quo solidit ates sphærarum & sphæricarum portionum atque sectorum cum conis & cylindris contulit; assumentes imprimis ea quæ in Elementis demonstrata sunt, nempe

Conos & cylindros æqualibus insistentibus basibus se-habere ut altitudines; & si altitudines æquales sunt, se habere ut bases.

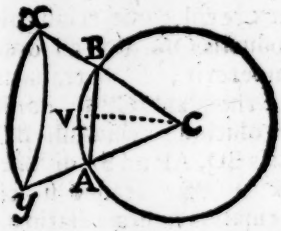
Et si coni vel cylindri pares sunt, bases & altitudines proportione reciprocari: & inversè, si proportione reciprocantur, ipsos æquari.

Et similes conos ac cylindros in triplicata esse ratione laterum, vel radiorum, vel diametrorum basis.

Et cylindros conorum æquè altorum & super æquali base constitutorum triplos esse. Præmittimus & definitionem unam ac alteram.

1. Solidus sector (vel sector sphæricus) est figura comprehensa superficie coni, verticem habentis in centro sphæræ, & sphæricâ superficie intra conum.

Ut

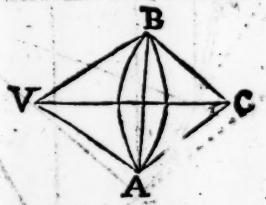


Ut figura BCAV comprehenſa ſub ſuperficie conica BCA, parte ſuperficiei coni XCY, & ſuperficie ſphærica BVA.

Vel eſt figura compoſita è cono CBA (verticem habente in centro ſphæræ C) & portione ſphærica BVA, ſuper eadem baſe BA.

Vél ſi ſector circularis VCB circa radium CV revolvatur, procreabitur ſector ſphæricus BCA.

2. Solidus rhombus eſt figura conſtans duobus conis rectis inverſis, ſuper eadem baſe conſtitutis, & vertices habentibus in eodem communi axe,



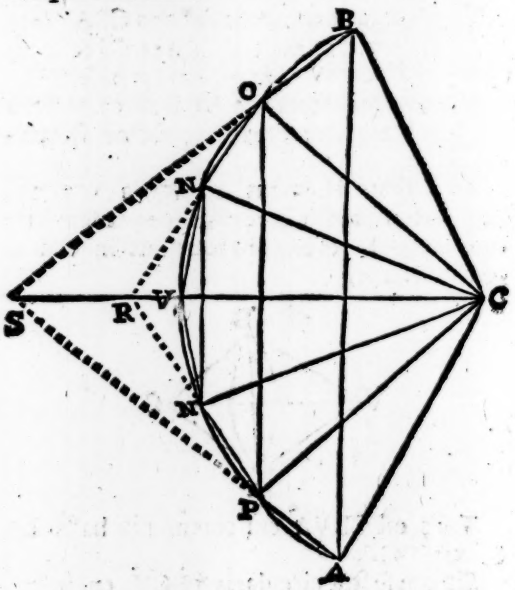
Talis eſt CBVA, cui communis baſis BA & axis VC.

Sit jam ſector circularis * BCV, cui inſcribatur figura æquilatera BOMV, & ſector cum figyra circa radium CV revolvatur, & à ſectore circulari producetur ſector ſphæricus; a figura autem corpus ſolidum conſtans prim m rhombo MCNV; tum eo quod producitur

* *Minor vel non maior quadrante.*

Confer hæc cum præmissis in Lectione prima.

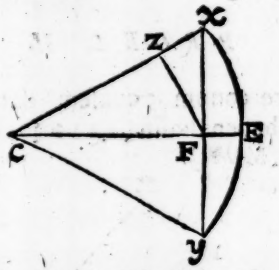
ducitur ex revolutione trianguli OCM, hoc est, (productis OM, PN ad occursum R) ei quod supererit, si detrahatur rhombus MCNR è rhombo OCPR; eo denique quod fit è revolutione trianguli BCO, hoc est, (productis BO, AP ad S) differentiæ rhombi BCAS & OCPS. Itaque si sciri possit hujusmodi cujusvis figuræ relatio ad conum aliquem, eo forte ratio dignoscetur sectoris sphærici ad conum. Huc collimant sequentia problemata.



Probl.

PROBL. I.

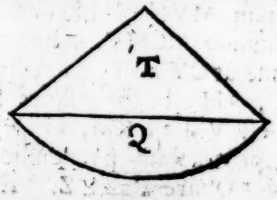
Invenire conum æqualem dato cono (CXY) cujus basis (Q) æqualis sit curvæ superficiei dati coni (CXY).



Analysis. Sit T altitudo coni quæsiti, & quia coni XCY, TQ ponuntur æquales, [y] erit ut altitudo CF coni XCY ad T, altitudinem coni TQ, ita reciprocè basis Q ad basin XEY; [z] hoc est, superficies XCY ad basin XEY, [a] hoc est, ut latus CX ad radium FX. Ita ut sit CF. T :: CX. FX. Atqui ducendo FZ ad perpendicularem, [b] erit CX FX :: CF. FZ (ob similitudinem triangulorum CXF, CFZ). [c] Ergò FZ = T. Hinc,

[y] 15.12.
[z] *Hyp.* & 7.5.
[a] *cor.* 5. 1 *Lect.*
[b] 4.6.
[c] 9.5.

Conus (TQ) cujus basis (Q) æquatur superficiei coni (XCY), & altitudo (T) rectæ (FZ) quæ ducitur à basis centro (F) ad latus (CX) perpendicularis, æquatur cono (CXY). *Theor. I. Archim. 7. l*

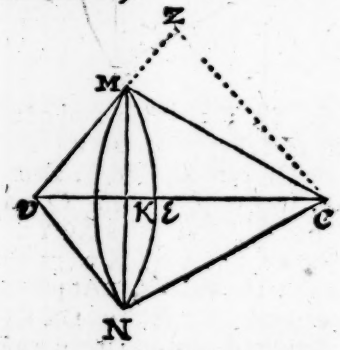


Nam

d *Hyp.* Nam quia T = d FZ, e erit CF. T :: CF.
e 7.5. FZ :: f CX FX :: g superficies XCY, basis
f 4.6. XEY :: h Q. basis XEY. Ergò altitudo CF
g *Cor.* 5. ad altitudinem T, ita est reciprocè basis Q
1 *Lect.* ad basin XEY. i Quare coni XCY & TQ
h *Hyp.* & æquantur. Q.E.D.
7.5.
i 15.12.

PROBL. II.

Invenire conum æqualem dato rhombo (MCNV) habens basin (Q) æqualem superficiei coni (MVN).



Analysis. Altitudo coni quæsiti sit T, &
k 14.12. quia conus MCN, conus MVN :: k CK. KV.
& componendo rhombus MCNV conus
l 8.5. MVN :: CV. KV; hoc est, ut conus cujus
m *Hyp.* basis æquatur basi MEN, & altitudo ipsi
n 15.12. CV ad conum MVN; l iste conus igitur
o *Hyp.* & æquatur rhombo MCNV, m hoc est, cono
7.5. TQ. n Unde ut CV ad T, ita reciprocè erit
p *Cor.* 5. Q ad MEN, o id est, superficies MVN ad
1 *Lect.* MEN, p id est, VM ad KM, q id est, (ductâ
q 4.6. CZ ad VM protractam perpendiculari) ut
r 9.5. CV ad CZ. r Quare T = CZ. Hinc,

Conus

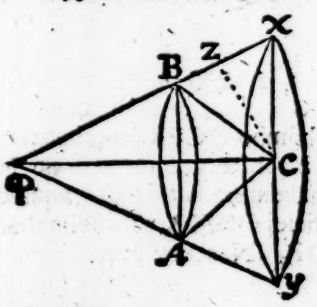
Conus (TZ) cujus basis (Q) æquatur superficiei coni (MVN), & altitudo (T) rectæ (CZ) quæ ducitur a vertice (C) coni (MCN) perpendicularis ad latus (VM) coni (MVN) æquatur rhombo (MCNV). *Theor. II. Archim. 18. I.*

Nam ob T = CZ, [f] erit CV. T :: CV. CZ :: [t] VM. VK :: [u] superficies MVN, basis MEN :: [x] Q MEN. [y] Unde conus, cujus altitudo æquatur ipsi CV, & basis circulo MEN, æquatur cono TQ (ob reciprocam basium & altitudinum proportionem). Ejusmodi verò conus æqualis [z] ostensus est rhombo MCNV. [a] Ergò conus TQ æquatur rhombo MCNV. Q.E.D.

[f] 7. 5.
[t] 4. 6.
[u] *Cor.* 5. 1. *Lect.*
[x] *Hyp.* & 7. 5.
[y] 15. 12.
[z] *In analys.*
[a] 1. *ax.* 1.

PROBL. III.

Si rhombus BCAΦ detrahatur è cono χΦY, invenire conum residuo æqualem, habentem basin (Q) æqualem superficiei χBAY, planis parallelis χY, BA interceptæ.



Coni quæsiti altitudo sit T, & primo hujus) liquet conum, cujus altitudo est CZ (perpendicularis è centro basis ad coni χΦY latus Φχ) & basis par superficiei χΦY æquari cono

cono $X\phi Y$. Item (e secundo hujus) conum, cujus altitudo est CZ, & basis par superficiei $B\phi A$. æquari rhombo $BCA\phi$. Unde si detrahatur rhombus $BCA\phi$ à cono $X\phi Y$, residuum æquabitur cono, cujus itidem altitudo est CZ, basis par residuæ superficiei conicæ χBAY, vel circulo Q. Adeóque CZ = T. Hinc,

Theor. III. Archim. 19. 1. Conus (TQ) cujus basis (Q) æquatur superficiei conicæ (χBAY) parallelis planis χY, BA interceptæ, & altitudo (T) perpendiculari (CZ) ductæ à centro (C) basis coni ($\chi\phi Y$) ad ejus latus ($\phi\chi$), æqualis est differentiæ coni ($\chi\phi Y$) & rhombi ($BCA\phi$).

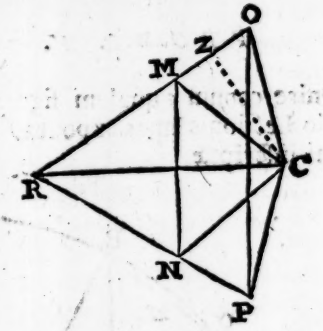
Nam conus, cujus altitudo est CZ, & basis æqualis superficiei conicæ χBAY æquatur differentiæ duorum conorum, habentium communem altitudinem CZ, & bases æquales superficiebus conicis $\chi\phi Y$, $B\phi A$; * id est, differentiæ coni $\chi\phi Y$ & rhombi $BCA\phi$. Unde conus TQ illi differentiæ æquatur. Q.E.D.

* *Per duo postrema theoremata.*

PROBL. IV.

Si à rhombo OCPR detrahatur rhombus MCNR, invenire conum residuo MOCNP parem, habentem basin (Q) æqualem conicæ superficiei OMNP, parallelis rhomborum basibus OP, MN interceptæ.

Sit



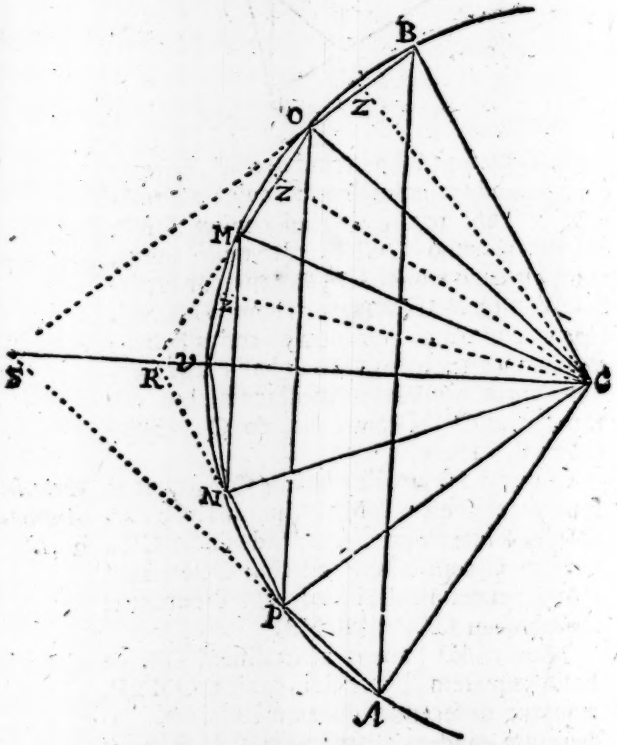
Sit T rursus altitudo coni quæsiti, erítque (per secundum hujus) conus, cujus altitudo CZ, & basis par superficiei conicæ ORP, æqualis rhombo OCPR. Itémque conus, cujus altitudo eadem CZ, & basis par superficiei conicæ MRN æquatur rhombo MCNR. Horum conorum differentia est conus habens eandem altitudinem CZ, & basin æqualem differentiæ superficierum illarum, hoc est, superficiei OMNP, vel circulo Q. Ergò CZ=T. Unde,

Conus (TQ), cujus basis (Q) æquatur superficiei conicæ OMNP, parallelis planis OP,MN interceptæ, & altitudo ductæ CZ à vertice C coni OCP ad coni ORP latus (OR) perpendiculari, æquatur differentiæ rhomborum OCPR,MCNR. *Theor. IV. Archim. 20. I.*

Nam conus habens altitudinem CZ, & basin æqualem superficiei conicæ OMNP, æquatur differentiæ duorum conorum, habentium eandem altitudinem CZ, & bases æquales superficiebus conicis ORP, MRN; * h.e. differentiæ rhombor. OCPR, MCNR. Unde conus TQ isti differentiæ exæquatur. Q.E.D. *Probl.* * *Per 2. hujus.*

PROBL. V.

Invenire conum æqualem figuræ (qualis est initio Lectionis hujus expositæ) sphæricæ portioni inscriptæ.



A centro C ad latera demittantur perpendiculares CZ ; & quia rhombus MCNV
* 2. hujus. * æquatur cono, cujus altitudo æqualis
est

est $\frac{1}{3}$ CZ, & basis superficiei coni MVN; & corpus MOCPN, residuum nempe subducto rhombo MCNR è rhombo OCPR æquatur cono, cujus etiam altitudo par est eidem CZ, & basis superficiei conicæ MOPN; item solidum OBCPA, quod restat subducto rhombo OCPS è rhombo BCAS, * æquatur cono, cujus itidem altitudo CZ, & basis æquatur superficiei conicæ OBAP; liquet totam figuram inscriptam æquari cono, cujus altitudo æquatur perpendiculari CZ, & basis toti superficiei figuræ inscriptæ. * 4 *hujus.*

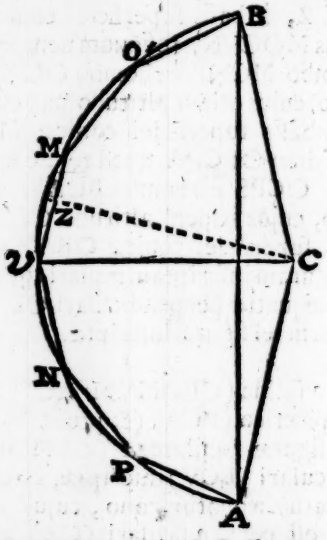
Hinc,

Figura solida (CBOMVNPAC) inscripta sectori sphærico (BCA) (& producta è revolutione figuræ æquilateræ (CVMOBC) sectori circulari (BCV) inscriptæ, circa axem CV rotatu) æquatur cono, cujus altitudo æqualis est perpendiculari (CZ), è centro sectoris ad unum inscriptæ figuræ latus ductæ, & basis superficiei (VMOBAPNV) figuræ solidæ inscriptæ. (Exclusâ scilicet superficie coni BCA). *Theor. V. Archim.* 34. 1.

Nota] Procedit hoc de sectore sphærico, qui non major est hemisphærio.

PROBL. VI.

Conum invenire parem sectori sphærico (BCAV).



Si ſectori ſphærico inſcribatur figura VMOBCAPNV, qualem mox deſcripſimus, cujus lateri perpendicularis ſit è centro ducta CZ; liquidò conſtat è dictis hanc figuram æquari cono cujus altitudo CZ, baſis æqualis ipſius ſuperficiei VMOBAPNV. Quia verò latus VM minus aſſumi poſſit quavis aſſignabili lineâ, vel indefinitè parvum; adeò ut conſequenter CZ minimè differat à radio ſphæræ, & ſuperficies inſcriptæ figuræ deſignat in ſuperficiem ſphæricam BVA; & figura ipſa quaſi tranſeat in ſectorem ſphæricum, ſatis manifeſtum eſt, quod

Theor. VI. Archim. 38. l. Sector ſphæricus æquatur cono, cujus altitudo æquatur radio ſphæræ; baſis autem perficiei ſphæricæ portionis, cui ſector inſiſtit,

Pro-

Procedit de sectore, qui non est hemisphærio major. At consectatur etiam de majore. Vide Coroll. 5.

COROLL.

1. Hemisphærium æquatur cono, cujus basis æquatur superficiei hemisphærii (hoc est, duplæ hemisphærii basi) & altitudo radio sphæræ. Et, *Archim. 26. I.*

2. Hemisphærium duplum est coni super eadem base, & sibi æquè alti. Et proinde,

3. Hemisphærium est $\frac{2}{3}$ cylindri super eandem basin, & æquè alti. Et consequenter,

4. Tota sphæra subsesquialtera est cylindri sibi circumscripti.

Separatim hoc nobile theorema demonstravit auctor, quidni meliùs pepercisset operæ, cùm in isto generali contineatur: aut ab ea immediatè resultet?

5. Etiam * sector sphæræ major hemisphærio æquatur cono. Cujus altitudo radius sphæræ, & basis æqualis superficiei suæ sphæricæ. * Καταχρηστικῶς *dictus.*

Nam si è cono, cujus altitudo radius sphæræ, & basis superficies totius sphæræ, auferatur conus cui altitudo etiam radius sphæræ, & basis superficies minoris portionis, remanebit conus itidem altitudinem habens radium sphæræ, & basin æqualem superficiei sphæricæ residuæ; qui proinde par est sectori majori residuo.

6. Sphærica portio hemisphærio minor æquatur cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis æqualis superficiei suæ sphæricæ; minùs cono super eadem base verticem habente in centro sphæræ.

7. Sphærica portio hemiſphærio major ſimili quoque cono æquatur, ſed addendo conum ſuper eadem baſe verticem habente in centro ſphæræ.

Complura deducantur hinc corollaria, circa conos & cylindros ſphæræ inſcriptos; ſed non id agimus, at verò tantùm ut authoris noſtri methodum elucidemus. Et cùm nihil in primo libro notabile reliquerimus intactum, tranſibimus ad ſecundum.

LECT. IV.

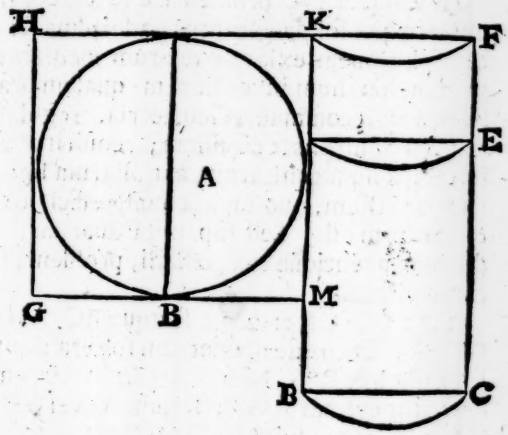
HActenus conati ſumus modum exponere, quo Archimedes præcipua ſua circa ſphæram theoremata inveſtigavit. Et poſſemus hanc principalem aſſequuti ſcopum jam conquieſcere. Verum operæ forſan pretium fuerit analyticam problematum, quæ in ſecundo libro habentur, ſolutionem tradere, quo planiùs appareat, qualem ille ſubtiliſſimus vir analyſin uſurpârit, & quàm hodiernæ noſtræ parum diſſimilem.

LIB. II.

PROBL. I.

Archim. I. Invenire ſphæram æqualem dato cylindro BE.

Sit



Sit D=BC diametro baſis, & L=CE lateri cylindri dati; & A diameter ſphæræ quæſitæ. Jam ſphæræ circumſcriptus concipiatur cylindrus GHKM (habens nempe latus GH, & diametrum baſis GM, utrumque æquale ipſi A). Et liquet è prædictis eſſe cylindrum GHKM [b] $=\frac{3}{2}$ ſphæræ A. Unde ſi fiat CF$=\frac{3}{2}$CE, erit cylindrus BF [c] ($\frac{3}{2}$ cylindri BE) æqualis cylindro GHKM. Unde ut BCq ad GMq [d], ita reciprocè erit GH ad CF; hoc eſt, Dq. Aq :: A. $\frac{3}{2}$L. Unde $\frac{Acub}{Dq}$ $=\frac{3}{2}$L. Atqui D, A, $\frac{Aq}{D}$, $\frac{Acub}{Dq}$ ſunt $\div\div$. Ergò D, A, $\frac{Aq}{D}$, $\frac{3}{2}$L ſunt $\div\div$ & proinde A eſt prima è duabus inter D & $\frac{3}{2}$L mediis proportionalibus.

[b] *Cor. 6. 2 Lect.*
[c] 14. 12.
[d] 15. 12.

Hinc liquet hoc problema esse ex eorum numero quæ solida vocantur, ad ipsius scilicet solutionem exigens duarum mediarum proportionalium inventionem, qualem præstare nequit communis Geometria, regulam tantùm adhibens & circinum; requiritur ad hoc sectionum conicarum, aut aliarum linearum auxilium, quo multis modis effici possit & effectum est. Sed suppositâ duarum mediarum inventione seu possibili, problema sic componimus.

Fiat CE. CF :: 2. 3; sintque BC, A, O, CF $\div\div$. Dico esse diametrum sphæræ æqualis cylindro BE. Nam sphæræ A circumscribatur cylindrus GK; & quia A (vel GH). CF :: BC. O :: BCq. Aq (vel GMq). [e] Erit cylindrus GK æqualis cylindro BF, Verùm sphæra A [f] $= \frac{2}{3}$ cylindri GK; & cylindrus BE [g] $= \frac{2}{3}$ BF. Ergò A æquatur cylindro BE. Q.E.F. Hinc emergit,

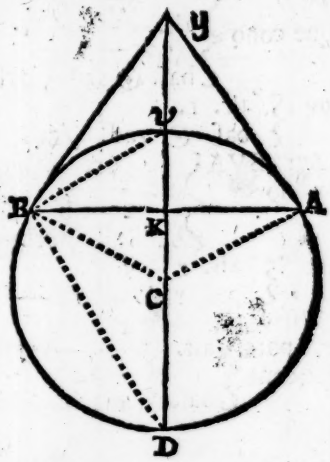
[e] 15. 12.
[f] *Cor.* 6. 2 *Lect.*
[g] *Const.* & 14. 12.

Theor I. Diameter (A) sphæræ cylindro (BE) æqualis est prima duarum inter diametrum (BC) basis cylindri, & rectam lateris (CE) sesquialteram mediarum proportionalium.

PROBL. II.

Invenire conum æqualem portioni (BVA) sphæræ (BVAD) habentem eandem cum portione basin (BA).

Ana-



Analysis. Conus quæsitus sit BYA, cujus altitudo KY=a. Et sit radius CV, vel CD =r. Et axis KV=b, unde CK=r—b. Et DF=2r—b. Et VBq=2rb (quia DV ×VB=VBq) unde KBq=2rb—bb (ob angulum rectum VKB). Jam quia portio BVA * æquatur cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis æqualis superficiei portionis, id est, circulo cujus radius VB, subducto tamen hinc cono BCA. Hoc est, portio BVA=cono $\begin{cases} \text{alt. } r=CV \\ \text{bas. } \odot \text{ rad.} \sqrt{2rb} = \odot \text{ rad. } VB \end{cases}$ *6.2 Lect.

—cono $\begin{cases} \text{alt. } r-b=CK \\ \text{bas. } \odot \sqrt{2rb-bb} = \odot KB \end{cases}$

Fac reciprocè $\begin{cases} 2rb-bb.\ 2rb :: r.\ \dfrac{2rr}{2r-b} \\ KBq \quad AEq :: CV \end{cases}$

* 15. 12. * Erítque cono { alt. $\frac{2rr}{2r-b}$; baſ. ⊙ rad. $\sqrt{2rb-bb}$

= cono { alt. r. ; baſ. ⊙ rad. $\sqrt{2rb}$

Itaque port BVA { = cono { alt. $\frac{2rr}{2r-b}$; baſ. rad. $\sqrt{2rb-bb}$

— cono { alt. r — b ; baſ. rad. $\sqrt{2rb}$ — bb

* 14. 12. * Hoc eſt port BVA = cono { alt. $\frac{2rr}{2r-b}$ — r + b. ; baſ. ⊙ $\sqrt{2rb}$ — bb = ⊙ rad. KB

Unde $a = \frac{2rr}{2r-b} + b - r = \frac{3rb-bb}{2r-b}$

Vel hanc æquationem ad analogiſmum reducendo, a. b :: 3r — b. 2r — b. Hoc eſt,

KY. KV :: DK + CV. DK.

Quod eſt authoris noſtri ipſiſſimum theorema. Nempe,

Theor. II. Conus (BYA) communem habens baſin cum portione ſphæriça (BVA), & cujus altitudo (KY) ita ſe habet ad portionis axim (KV) ut compoſita è ſphæræ radio (CV) & reſiduæ portionis axe (DK) ad reſiduæ portionis axem (DK), æquatur portioni (BYA).

Syntheſis. Nam quia KY. KV * :: DK + CV. DK. Erit

* *Conſt.* dividendo VY. KV :: CV. DK. Et permutando VY. CV :: KV. DK. Et componendo CY. CV (hoc eſt, cono { baſ. ⊙ rad. KB. ; alt. CY.

cono

cono { baſ. rad. KB. / alt. CV. } :: DV. DK :: DVq.

DBq. (ob DV, DB, DK ∴) :: VBq. KBq : :
cono { baſ. ⊙ rad. VB. / alt. CV. } cono { baſ. rad. KB. / alt. CV. }

Unde erit conus { baſ. rad. KB. / alt. CY. }
= cono { baſ. rad. BV. / alt. CV. } = port. BVA +
cono BCA. Ergo conus { baſ. rad. KB. / alt. KY. }
= port. BVA. Hoc eſt, conus BYA = port. BVA. Q.E.F.

PROBL. III.

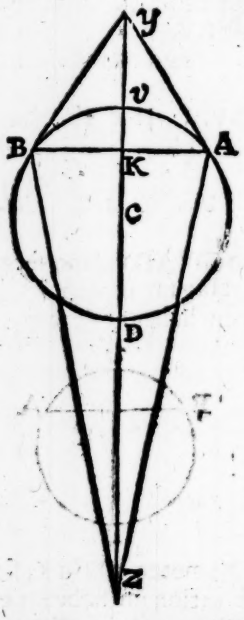
Sphæram (BVAD) plano ſecare, ſic ut portionum effectarum ſuperficies (BVA, BDA) proportionem habeant datam (X ad Y).

Secetur diameter VD in K, ſic ut ſegmenta KV, KD rationem habeant eandem cum data X ad Y, & per K tranſeat planum BA; quódque ſuperficies BVA, BDA ſe habent ut axes KV, KD, hoc eſt, ut X, Y patet è ſupradictis. Quid ergò plura? § *Cor.* 9. 1. *Lect.*

Probl.

PROBL. IV.

Analyſis. Datam ſphæram (BVAD) ſecare, ſic ut portiones (BVA, BDA) rationem habeant datam (X ad Y).



Factum ſit à plano BA perpendiculari ad diametrum VD, & ſint $\begin{cases} VD = d. \\ CV = r. \\ DK = a. \end{cases}$

Unde $KV = 2r - a.$

Jam ſi $DK. DK + CV :: KV. KY.$

Hoc eſt, $a. \; a + r \; :: 2r - a. \; KY = \frac{2rr}{}$

$\frac{2rr+ra-aa}{a}$. [h] Erit conus BYA æqualis portioni BVA. Item si VK.VK+CV :: KD. KZ. Hoc est, $2r-a.3r-a :: a.$ $KZ = \frac{3ra-aa}{2r-a}$. Erit conus BZA æqualis portioni BDA. [i] Ergò K. Y :: cono BYA. cono BZA [k] :: KY. KZ :: $\frac{2rr+ra-aa}{a}$. $\frac{3ra-aa}{3r-a}$. Quare (ducendo in se extrema & media) erit $\frac{3xra-xaa}{2r-a} = \frac{zyrr+yra-yaa}{a}$

[h] 2 *hujus.* [i] *Hyp.* & 7.5. [k] 14.12.

Et (utrumque latus æquationis multiplicando per $2r-a$ & a) erit $3xraa-xa^3 = 4ry^3-3yraa+ya^3$. Et (per transpositionem) $3xraa+3yraa-xa^3-ya^3 = 4yr^3$. Et (dividendo utrinque per $x+y$) $3raa-a^3 = \frac{4yr^3}{x+y} = \frac{yrdd}{x+y}$ (substituendo dd pro 4rr).

Et faciendo $x+y.y :: r.p = \frac{yr}{x+y}$. Erit $3raa-a^3 = pdd$. Vel reducendo hanc æquationem ad analogismum erit $3r-a.$ $p :: dd.aa$. Id est, $CV+KV.\frac{Y \times CV}{Y+X}$ :: VDq. DKq.

Qui ipsissimus est analogismus iste, ad quem rem deduxit Archimedes; quod ipsum satis prodit ac arguit, qualem is analysin usurparit. Nam huc eum deveniisse varias

rias iſtas proportionum compoſitiones, diviſiones, permutationes, ac inverſiones, quales in diſcurſu ſuo oſtentat adhibendo, pene ſupra fidem eſt. Quod ſi feciſſet, caſui potiùs imputandum eſſet quàm rationi vel arti, quòd in genuinas inciderit quæſtionum ſolutiones; & ut hoc adeò conſtanter obtingeret, nullo pacto fieri poteſt aut concipi.

Quod ad ipſum problema ſpectat, liquet ipſum eſſe ſolidum, nec ex iſto genere facillimum effectu. Integram pollicetur author ejus reſolutionem & compoſitionem, ſed non apparet an præſtiterit. Cui ſupplendo defectui nonnullas exhibet Eutocius laborioſas & prolixas conſtructiones, per conicarum nempe ſectionum interſectiones, quas nos omittimus. Concinnam & expeditam tradit excellentiſſimus Hugenius, in libello de conſtructione problematum illuſtrium: vide sis. Vel adhibeas ipſe generalem Carteſii methodum, quam pro conſtruendis hujuſmodi problematis edocet.

Nihilominus ut eò progrediamur quò proceſſit author, ſuppoſitâ poſſibili hujus analogiſmi effectione, problema ſic componimus:

Fiat X-|-Y. Y :: CV. P, & ſecetur DV in K, ita ut ſit CV-|-KV. P :: VDq. KDq; & per K tranſeat planum ipſi VD rectum. Dico factum. Nam fac CV-|-DK. DK :: KY. KV, & CD-|-VK. VK :: KZ. KD. Erítque dividendo CV. DK :: VY. KV, & CD. VK :: DZ. KD, & permutando CV. VY :: (DK. KV :) DZ. CD. Et inversè componendo CY. CV (CD) :: CZ. DZ. Et componendo tam antecedentes quàm conſequentes,

YZ.

YZ. CZ :: CZ. DZ; unde YZ. DZ :: CZq. DZq :: DVq. DKq (quia priùs erat CD. DZ :: KV. DK, & componendo CZ. DZ :: DV. DK). Atqui erat primò DVq. KDq :: DV +KV. P. Ergò YZ. DZ :: CV+KV. P. Quinetiam fuit CV+VK. VK :: KZ. KD, & proinde per conversionem rationis CV+VK. CV :: KZ. DZ; vel inversè CV. CV+VK :: DZ. KZ. Ergò ex æquo perturbatè CV. P :: YZ. KZ; id est, X+Y. Y :: YZ. KZ. Et divisim X. Y :: YZ. KZ :: con. BYA. con. BZA (h.e.) :: port. BVA, port. BDA. Q.E.F. *Cor.* 20. 6. *Const.* 14. 12.

LEMMA.

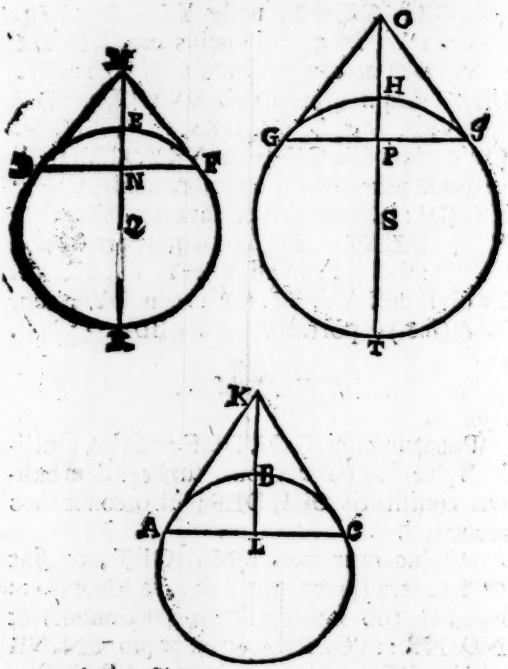
Ponatur coni GOI, DMF æquales similibus sphæricis portionibus, super iisdem basibus constitutis GHI, DEF; dico conos hos assimilari.

Producantur axes MNR, OPT, & sint Q, S centra sphærarum; & quia EN. ND :: HP. PG (ob similitudinem portionum) & ND. NR :: PG. PT; & ex æquo EN. NR :: HP. PT; erit componendo ER. NR :: HT. PT. Et antecedentes dimidiando QR. NR :: ST. PT. Et componendo QR+NR :: NR :: ST+PT. PT. Hoc est, MN. EN OP. HP. At priùs erat EN. ND :: HP. PG. Ergò ex æquali MN. ND :: OP. PG. Unde coni DMF, GOI sunt similes. 2 *hujus.*

PROBL. V.

Efficere portionem sphæricam æqualem datæ portioni (ABC) & similem alteri datæ (DEF).

Ana-



Analysis. Sit GHI portio quæsita, fiántque coni AKC, DMF, GOI æquales portionibus ABC, DEF, GHI, singuli singulis ordine. Quare conus GOI [l] = cono AKC; & idcirco [m] ACq. GIq :: PO. LK. Unde $\frac{ACq \times LK}{GIq} = PO$. Item ob [n] similitudinem conorum GOI, DMF est DF. NM :: GI. PO :: GI. $\frac{ACq \times LK}{GIq}$ :: GI cub. ACq × LK. Qua-

[l] 1. *Ax.*
[m] 15. 12.
[n] *Lem. Pract.*

pro-

propter $\frac{DF \times ACq \times LK}{NM} = GI$ cub. Et (dividendo utrinque per ACq) $\frac{DF \times LX}{NM} = \frac{GI \text{ cub.}}{ACq}$. Atqui AC, GI, $\frac{GIq}{AC}$, $\frac{GI \text{ cub.}}{ACq}$ sunt $\div$. Ergò GI est prima duarum inter AC, & $\frac{DF \times LK}{NM}$ mediarum proportionalium.

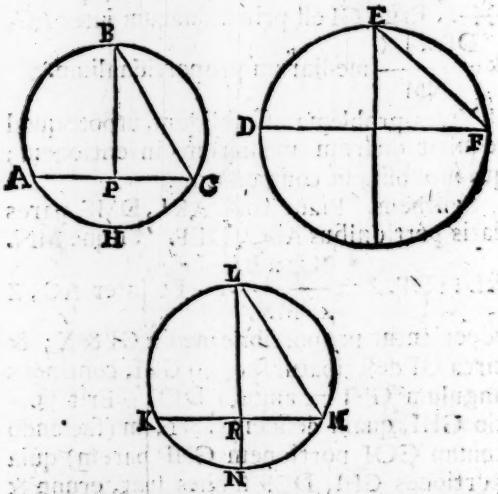
Vides problema esse solidum, utpote quod requirit duarum mediarum inventionem; quâ suppositâ sic componetur:

Synthesis. Fiant coni AKL, DMF pares datis portionibus ABC, DEF. Sitque MN. KL :: DF. $Z = \frac{KL \times DF}{MN}$. Et inter AC, Z reperiantur proportione mediæ GI & X; & circa GI describatur portio GHI, continens angulum GHI = angulo DEF. Erit portio GHI, quam desideras. Nam (faciendo conum GOI portionem GHI parem) quia portiones GHI, DEF similes sunt, erunt & coni GOI, DMF similes. Unde PO. GI :: MN. DF :: KL. Z. Et permutando PO. KL :: GI. Z :: AC. X :: ACq. GIq (quia AC, GI, X, Z sunt $\div$). Quare reciprocam habentes basium & altitudinum proportionem, coni GOI, AKC æquantur, & proinde portiones GHI, ABC æquantur. Q.E.F.

Probl.

PROBL. VI.

Datis duabus portionibus ſphæricis (ABC, DEF) invenire ſphæricam portionem ſimilem earum uni (ABC), & ſuperficiem habentem alterius (DEF) ſuperficiei parem.



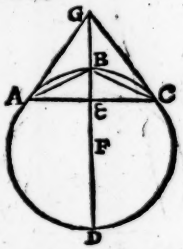
Analyſis. Sit portio KLM qualis expoſitur. Unde ob ſuperficierum KLM, DEF æqualitatem, circulus radio LM æquatur circulo ad radium EF, adeóque LM = EF. Item ob portionum KLM, ABC ſimilitudinem, eſt BC. BH: : LM. (EF). LN. Hinc componetur ſic; Fac BC. BH: : EF. LN. Et ſit LN diameter ſphæræ, ſecetur LN in R, ita ut ſit BP. PH :: LR. RN. Et per R tranſeat planum KM ad LN perpendiculare. Liquet portionem KLM ipſi ABC ſimilem eſſe,

&

& esse LM. LN :: BC. BH :: EF. LN. Unde LM = EF. Adeóque circulus radio LM exæquat circulum radio EF ; h. e. sphærica superficies KLM superficiem ABC. Q.E.D.

PROBL. VII.

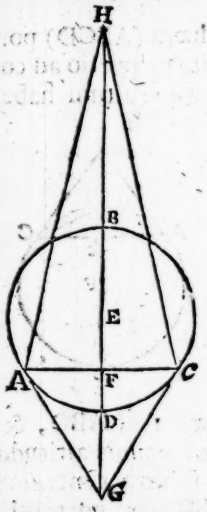
A data sphæra (ABCD) portionem plano abscindere, ita ut portio ad conum super eadem basi, & æquè altum habeat assignatam rationem (Y ad X).



Portio quæsita sit ABC, & conus etiam ABC, quibus communis altitudo BE ; in qua protracta sit sphæræ centrum F. Ponatúrque conus AGC par portioni ABC. Unde FD + ED. ED :: EG. EB : : cono AGC. cono ABC : : Y. X. Et dividendo FD. ED : : Y — X. X. Componitur autem sic ; Fac Y — X. X : : FD. ED (& consequenter Y. X : : FD + ED. ED) & per E secetur sphæra plano AC ad BD recto ; & faciendo conum AGC = port. ABC, erit GE. BE (id est, con. AGC, ABC) : : FD + ED. ED : : Y. X. Unde port. ABC. con. ABC : : Y. X. Q.E.F.

PROBL. VIII.

Sphærâ ABCD per planum AC divisâ, superficierum & soliditatum ABC, ADC proportiones inter se comparare.



Si fiat conus AHC = port. ABC, & conus AGC = port. ADC; ° evidens est portionum ABC, ADC rationem eandem esse cum ratione HF ad GF; P & proportionem superficierum ABC, ADC eandem esse cum ratione axium BF. FD; hæ igitur rationes comparandæ sunt. Et quia HF. BF q :: R + DF. DF. Et divisim HB. BF :: R. DF r □ BF. R. (quia Rq * □ BF × DF = FAq). Unde HB × r R □ BFq. † & HB □ BF. Est autem R + BF. BF q :: FG. FD. Et permutando R + BF. FG :: BF. DF f :: HB. R r □ HF (HB + BF) R +

° 14. 12.
P 5 Cor. 9.
1 Lect.
q 2 hujus.
r 1 Lem. infra.
* 5. 2.
† 14. 5.
f Supra & permutando

R-|-BF. [t] Quare Qu. R-|-BF ▭ HF × FG. [t] *Lem. infra.*
* Unde Qu. R-|-BF. FGq ▭ HF × FG. FGq ; † hoc est, BFq. DFq ▭ HF. FG. Id est, *8.5.

Concl. 1. Portiones ABC, ADC minorem habent rationem duplicatâ ratione superficierum. † *Supra* & 1.6.

Porrò, faciendo Xq = HB × R * ▭ BFq. Quia HB. X [u] :: X. R. Et componendo HB-|-X. X-|-R :: X. R ; [x] erit Qu. HB-|-X. Qu. X-|-R :: Xq. Rq. [y] :: HB. R. Sed HF (HB-|-BF) R-|-BF. * ▭ HB-|-X. R-|-X (quia X [z] ▭ BF). Quare HFq. Qu. R-|-BF. ▭ HB. R. [z] :: R-|-BF. FG. Pone Z, R-|-BF, Y, FG esse ∴. Inde Zq. Qu. R-|-BF [y] :: Z. Y :: R-|-BF. FG ▭ [a] HFq. Qu. R-|-BF. [b] Ergò Z ▭ HF. Verùm ratio Z ad FG est sesquialtera rationis R-|-BF ad FG. [c] Ergo proportio HF ad FG major est sesquialterâ rationis R-|-BF ad FG, vel rationis BF ad DF. Id est, * *Priùs.* [u] 17.6. [x] 22.6. [y] 20.6. *3 *Lem.* [z] *Supra.* [a] *Priùs.* [b] 10.5. [c] 8.5.

Concl. 2. AEC, ADC habent rationem majorem sesquialterâ rationis, quam habent ipsarum superficies ABC, ADC.

Lemmata. Assumptum est, 1. Si HB. BF ▭ BF. R. esse HB × R ▭ BFq. Id quod sic ostenditur : Sit A. B ▭ C. D, dico esse AD ▭ BC. Nam puta A. B :: C. E. * Ergò E ▭ D, ergò AD ▭ AE = BC. 10.5.

Simili discursu, si A. B ▭ C. D, erit AD ▭ EC.

Et inversè si AD ▭ BC, erit A. B ▭ C. D.

2. Si HB ▭ R, assumendo quamvis BF, erit HB. R ▭ HB-|-BF. R-|-BF. Sit inquam A ▭ B, & quævis C, dico esse A. B ▭ A : C. B-|-C. Nam ob A ▭ B erit C. B ▭ CA ; 8.5.

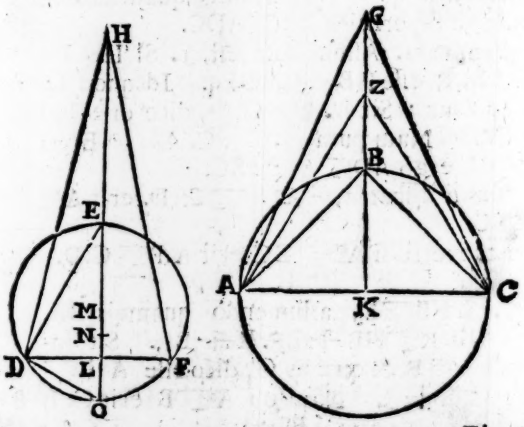
□CA; & componendo C+B, B□C+A. A. & permutando C+B. C+A□B. A. Et retrogradè A.B□C+A. C+B.

3. HB+BF. R+BF□HB+X. R+X, X□BF. Nam ob HB *□R, est HB×X —BF□R×X—BF: hoc est, HB×X—HB×BF□RX—R×BF. Quare transponendo HB×X+R×BF□RX+HB×BF. Ergò addendo utrinque HB×R+BF×X, erit HB×X+R×BF+X×BF□RX+R×HB+HB×BF+X×BF. Hoc est, HB+BF×R+X□R+BF×HB+X. Ergò per 1. Lemma.

* *Priùs.*

PROBL. IX.

Superficie hemisphærii (AB C) positâ æquali superficiei portionis (DEF), ipsarum portionum soliditates comparare, (vel utrum sit ABC, an majus indagare hemisphærium portio DEF).



Fiant

Fiant coni ABC, DHE æquales portionibus ABC, DEF. [d] Quare [e] KG = 2KA, [f] & EM + LO. LO :: LH. LF. Ponatur EM = t, & KA = s. Quare BA (vel ED, quia superficies supponuntur æquales) & $\sqrt{2ss}$, & ob OE, ED, EL, hoc est, $2t, \sqrt{2ss}, \frac{ss}{t}$ ∴) $EL = \frac{ss}{t}$. Atqui $t, s, \frac{ss}{t}$ sunt ∴.

[d] *M centrum sphæræ DEFO.*
[e] *cor. 6. 2 Lect. & 14. 12.*
[f] *2. hujus.*

Ergò faciendo EN = AK = s, erit punctum N inter M & L. Et EN × NO [g] EL × LO, [g] 5. 2. hoc est, $s \times : 2t - s\,(2ts - ss) \sqsubset \frac{ss}{t} \times 2t - \frac{ss}{t}\,(2ss - \frac{s4}{tt})$. Et (addendo ss utrinque)

$2ts \sqsubset 3ss - \frac{s4}{tt} = 3t - \frac{ss}{t} \times : \frac{ss}{t} = EM +$

$LO \times LE = LO \times LH = 2t - \frac{ss}{t} \times LH$. Hinc

cùm $2s \times t \sqsubset 2t - \frac{ss}{t} \times LH$, erit $2s.LH \sqsubset$

$2t - \frac{ss}{t}.t :: 2ss - \frac{s4}{tt}.ss$. Id est, KG.LH ⊏ LDq (EL × LO) KAq. Unde posito KZ. LH :: LDq. KAq, [h] erit KG ⊏ KZ. Verùm (ob reciprocam proportionem) [i] est conus AZC æqualis cono DHF. Ergò conus AGC, hoc est, portio ABC, major est cono DHF, hoc est, portione DEF. Unde

[h] 10. 5.
[i] 15. 12.

Omnium sphæricarum superficierum sub æqualibus superficiebus comprehensarum maximum est hemisphærium. Nam

Theor. Vlt. Archim. II.

Nam quia $2ENq$ [k] $= 2KAq$ [l] $= BAq$ [m] $= EDq$ [n] $= EO \times EL$ [k] $2EM \times EL$, erit $ENq = EM \times EL$. Quare $EN \sqsupset EM$. Ergo $EN \times NO$ [p] $\sqsupset EL \times LO$. Additis igitur æqualibus ENq & $EM \times EL$; [q] est $EN \times EO$ [r] $(EN \times NO + ENq) \sqsupset EL \times LO + EL \times EM$ [s] $= LH \times LO$ [t] (quia $EM + LO$. $LO :: LH. LE$). Quare EN. [2] LH [u] $\sqsupset LO$. EO [x] $:: ODq. EOq$ [x] $:: DLq. EDq$ [y] $:: DLq. 2KAq$. Et antecedentes duplicando $2EN$ $(KG). LH \sqsupset 2DLq. 2KAq :$ [z] $DLq. KAq$. Fiat $KZ. LH :: DLq. KAq$; [z] eritque $KZ \sqsupset KG$. [a] Et consequenter conus AZC minor est cono AGC; hoc est, conus DHF minor cono AGC, [b] vel portio DEF minor portione ABC. Q.E.D.

Hoc secundi libri postremum est theorema; itaque proposito defunctus sum, & manum sumo de tabula.

FINIS.

k *Conſt.*
l 47.1.
m *Conſt. &* 9.1. *Lect.* *& Cor.* 2. 12.
n *Cor.* 8. & 17.6.
o 5.2.
p 2. *ax.*
q 3.2.
r 16.6.
s 2 *bujus.*
t 1 *Lemma præc.*
u *Cor.* 8. & 20.6.
x *Cor.* 8. & 22.6.
y 7.5. & *ſupra.*
z 10.5.
a 14.12. & 14.5.
b *Conſt.*

UMI